

Etude de modèles de poutres

Comme vous avez pu le voir dans le cours de RDM une poutre est un solide engendré par une aire plane Σ dont le centre de gravité G décrit une courbe orientée Γ , le plan Π de Σ restant normal à Γ . L'aire plane Σ est appelée section droite, c'est l'intersection d'un plan Π perpendiculaire à la fibre moyenne et de la poutre, voir figure(1).

Le matériau composant la poutre est considéré homogène et isotrope. Ses caractéristiques mécaniques sont ρ

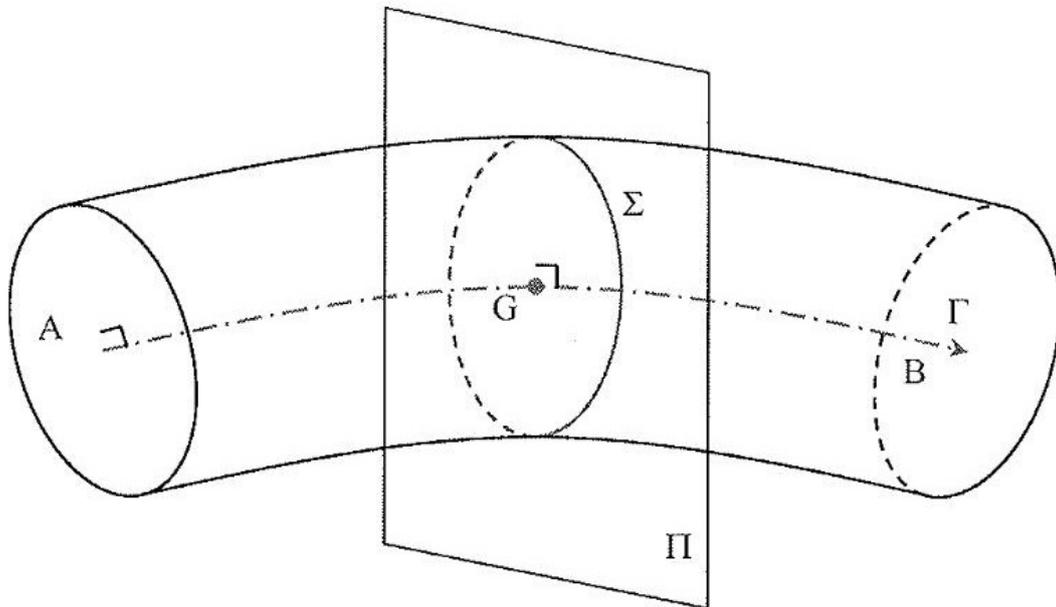
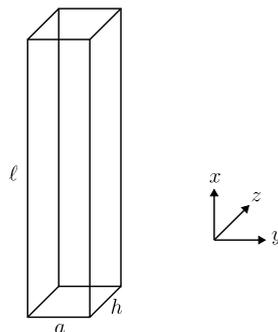


FIGURE 1 – Section droite et fibre moyenne (Polycopié de RDM)

la masse volumique et E son module d'Young. Ses caractéristiques géométriques sont (a, ℓ, h) respectivement l'épaisseur, la longueur et la profondeur de la poutre comme on peut le voir sur la figure ci-dessous. Dans



tout le projet on travaillera dans le plan (x, y) . L'élancement sera estimé en fonction du ratio $\frac{a}{\ell}$. On considère en général trois types de poutres :

- Les poutres "très élancées" ($\frac{a}{\ell} \ll 1$) qui travaillent en flexion : **les poutres d'Euler-Bernoulli**. Ce sont les poutres à la base de la théorie des poutres.
- Les poutres "non élancées" ($\frac{a}{\ell} \gg 1$) qui travaillent en cisaillement : **les poutres de cisaillement**
- Les poutres intermédiaires "peu élancées" qui travaillent en flexion et en cisaillement : **les poutres de Timoshenko**

1 Poutre d'Euler-Bernoulli

On considère les hypothèses suivantes :

- Au cours de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne, ce qui permet de négliger le cisaillement par rapport à la flexion.
- Les sections droites restent planes selon Navier-Bernoulli (pas de gauchissement).

Considérons une poutre de longueur totale ℓ . Nous nous plaçons dans le repère local de cet élément et s représente l'abscisse curviligne. Les extrémités sont notées D pour l'origine ($s = 0$) et F pour la fin ($s = \ell$). $u(s)$, $v(s)$ et $\theta(s)$ correspondent respectivement au déplacement transversal, au déplacement longitudinal et à la rotation de la section. L'effort normal, l'effort tranchant et le moment fléchissant sont notés N , T et M (voir figure(2)). Par convention ces efforts sont exercés par la partie gauche de l'élément sur la partie droite. Il n'y a pas de charge extérieure en partie courante.

En régime harmonique de pulsation ω , on peut écrire les variables $X(x, t)$ de la forme : $X(x, t) = \tilde{X}(x)e^{i\omega t}$.

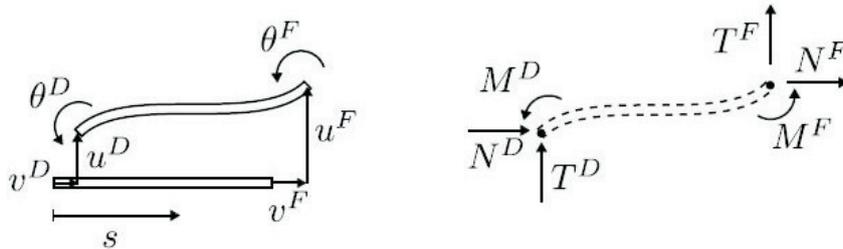


FIGURE 2 – Notation des éléments (Chesnais,2010)

Le comportement de la poutre d'Euler-Bernoulli, en régime harmonique de pulsation ω , est décrit par les équations suivantes :

Vibrations longitudinales

- Equation d'équilibre en force : $\frac{dN(s)}{ds} = \rho A \omega^2 v(s)$
- Loi de comportement : $N(s) = -E A \frac{dv(s)}{ds}$

Vibrations transversales

- Equation d'équilibre en force : $\frac{dT(s)}{ds} = \rho A \omega^2 u(s)$
- Equation d'équilibre en moment : $\frac{dM(s)}{ds} = -T(s)$
- Loi de comportement : $M(s) = -E I \frac{d^2 u(s)}{ds^2}$

Question 1.1 Déterminer la section de la poutre A et l'inertie de la poutre par rapport à l'axe z $I_z = I$ en fonction des grandeurs a et h .

Question 1.2 Par analyse physique retrouver les équations d'équilibre en force et en moment.

Question 1.3 Ecrire les équations d'onde longitudinales et transversales en régime harmonique en fonctions

des coefficients dynamiques

$$\begin{cases} \chi = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E}} & \text{coefficient dynamique de compression} \\ \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} & \text{coefficient dynamique de flexion} \end{cases}$$

Dans un premier temps on va encastrier cette poutre aux deux extrémités et on va chercher les différents modes de flexion.

Question 1.4.1 Ecrire les quatre conditions aux limites en déplacement de ce problème.

Question 1.4.2 Résoudre analytiquement l'équation d'ondes transversales pour montrer que l'équation aux fréquences de cette poutre bi-encastree est de la forme :

$$f(w) = 1 - \cos(w) \cosh(w) = 0$$

Avec w à déterminer en fonction des paramètres géométriques A , I et ℓ , des paramètres mécaniques ρ et E et de la pulsation ω .

Question 1.4.3 Résoudre cette équation non linéaire par la méthode itérative de votre choix (à justifier) et donner les trois premières pulsations propres de cette poutre bi-encastree.

Question 1.4.4 Donner l'expression analytique des 3 premières déformées modales et représenter leur allure.

Question 1.4.5 La donnée de l'équation d'ondes transversales et des quatre conditions initiales formule un problème de Cauchy. A partir de l'expression analytique de la déformée modale donner les quatre conditions initiales en déplacement.

Question 1.4.6 Pour les trois premiers modes, écrire un programme de type Runge-Kutta (ordre à justifier) qui permet de décrire le déplacement le long de la poutre et comparer à l'expression analytique du déplacement. Choisir les paramètres géométriques de telle sorte à respecter un élancement suffisant, c'est-à-dire à peu près $\frac{a}{\ell} = 0.1$. Pour les paramètres mécaniques prendre le matériau de votre choix (béton, acier...).

Maintenant on change de conditions aux limites on encastre la poutre seulement à la base et on la laisse libre en tête.

Question 1.5 Reprendre les questions précédentes avec ces nouvelles conditions aux limites. On cherche cette fois une équation aux fréquences de la forme :

$$g(\tilde{w}) = 1 + \cos(\tilde{w}) \cosh(\tilde{w}) = 0$$

Avec \tilde{w} à déterminer en fonction des paramètres géométriques A , I et ℓ , des paramètres mécaniques ρ et E et de la pulsation ω .

Question 1.6 Comparer les résultats.

2 Poutre de cisaillement

Ce type de poutre ne travaille plus en flexion, mais uniquement en cisaillement, c'est-à-dire que les sections droites restent parallèles entre elles comme on peut le voir sur la figure ci-dessous :

Equations d'équilibre :

Lois de comportement :

$$\begin{cases} N'(x) = \rho A \omega^2 v(x) \\ T'(x) = \rho A \omega^2 u(x) \end{cases} \quad \begin{cases} N(x) = -E A v'(x) \\ T(x) = -G S u'(x) \end{cases}$$

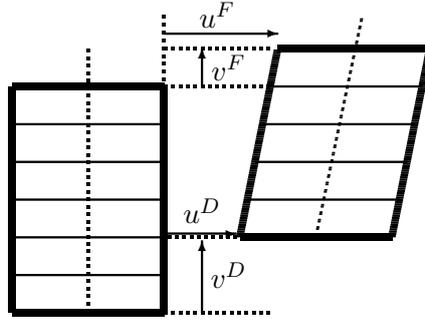


FIGURE 3 – Poutre de cisaillement

Avec ν le coefficient de poisson du matériau, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ le module de cisaillement et S la section réduite telle que pour une section A , $S = S_R A$. Ce coefficient correctif de rigidité S_R (Shear Area Ratio) permet de prendre en compte la forme parabolique que prend la distribution du cisaillement transverse (Pour une section rectangulaire $S_R = \frac{5}{6}$).

Question 2.1 Par analyse physique retrouver les équations d'équilibre en force.

Question 2.2 Ecrire les équations d'ondes longitudinales et transversales en fonction des coefficients dynamiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Coefficient dynamique de cisaillement : } \Omega = \sqrt{\frac{\rho A}{G S}} \omega \\ \text{Coefficient dynamique de compression : } \alpha = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega = \Omega \sqrt{\frac{S_R}{2(1+\nu)}} \end{array} \right.$$

Question 2.3 Pour une poutre de cisaillement bi-encastée, trouver analytiquement puis avec une méthode itérative les 3 premières fréquences propres de compression et de cisaillement en prenant les données géométriques et mécanique (avec ρ , ν et E correspondant à un matériau réel) de votre choix (attention à l'élanement).

Question 2.4 Faites la même chose pour une poutre de cisaillement encastée-libre.

Question 2.5 Comparer et commenter

3 Poutre de Timoshenko

Le modèle de poutre de Timoshenko est un modèle intermédiaire entre le modèle de poutre de cisaillement et le modèle de poutre d'Euler qui prend en compte à la fois la flexion et le cisaillement. Les lois de comportement s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = -E A v'(x) \\ T(x) = G S (\theta(x) - u'(x)) \\ M(x) = -E I \theta'(x) \end{array} \right.$$

D'après l'hypothèse classique en dynamique, le terme de l'inertie de rotation $J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ est négligeable, les équations d'équilibre s'écrivent donc, en régime harmonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} N'(x) = \rho A \omega^2 v(x) \\ T'(x) = \rho A \omega^2 u(x) \\ M'(x) = -T(x) \end{array} \right.$$

Question 3.1 A partir des équations d'équilibre et des lois de comportement écrire :

1. L'équation d'ondes longitudinales en fonction du coefficient dynamique de compression $\chi = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}}$,

2. L'équation d'ondes transversales en fonction du coefficient dynamique de cisaillement $\Omega = \sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{GS}}$ et du paramètre $C = \frac{EI}{GS}$ qui mesure l'importance de la flexion par rapport au cisaillement,
3. L'équation reliant les variables $\theta(x)$, $u'(x)$, $u^{(3)}(x)$ et les paramètres C et Ω .

Question 3.2 Sachant que pour une poutre de longueur ℓ sa rigidité en flexion s'écrit $K_f = \frac{EI}{\ell^3}$ et que sa rigidité en cisaillement s'écrit $K_c = \frac{GS}{\ell}$ retrouver les équations d'ondes transversales des poutres de flexion et de cisaillement à partir de l'équation d'ondes transversales de la poutre de Timoshenko.

Question 3.3 En prenant une poutre encastree à la base et libre en tête choisir des paramètres géométriques conformes à la modélisation poutre de Timoshenko. Trouver les 3 premiers modes transversaux analytiquement puis par une méthode itérative.