



Direction de la Formation Initiale
Département MIP
Année universitaire 2018-2019
Promotion 66

Projet de Modélisation

Sujet Génie Civil

Déformations d'une structure en porte-à-faux.

-
- Rapport écrit à envoyer sous la forme d'un unique pdf, **avant le mercredi 05 juin 2019**, à Dominique Mieral (dominique.mieral@entpe.fr)
 - Soutenance orale du projet prévue le **14 juin 2019**.
 - En cas de besoin, vous pouvez contacter les membres du jury par courriel (antoine.rallu@developpement-durable.gouv.fr ou nicolas.berthoz@developpement-durable.gouv.fr)

Informations générales

Les objectifs pédagogiques du projet sont les suivants :

- mobiliser les compétences de modélisation et d'expression écrite et orale des étudiants ;
- faire appel aux notions apprises en cours de Mécanique des Milieux Continus, Résistance des Matériaux et Analyse ;
- introduire la méthode des Eléments Finis à travers la résolution d'un problème "à la main" afin de permettre aux étudiants de comprendre les grands principes de cette méthode largement utilisée dans la pratique, et d'en appréhender la puissance et les limites.

L'évaluation du projet est effectuée sur la base d'un rapport et d'une soutenance :

- Le sujet commence par une phase guidée comportant les étapes de modélisation du problème, sa résolution analytique puis sa résolution par la méthode des éléments finis. Il se poursuit par une phase d'ouverture donnant une grande liberté aux étudiants, dont l'importance dans l'évaluation est notable (ne pas la négliger!).
- Le rapport aura la forme d'une note de synthèse dactylographiée de 10 à 15 pages. Celle-ci comportera les hypothèses principales effectuées, les étapes de calcul principales ainsi que les résultats obtenus, notamment des graphes de synthèse (non manuscrits) comparant les solutions analytiques et "éléments finis". Le détail des calculs (éventuellement manuscrit) sera joint en annexe. Les étudiants auront un regard critique sur les hypothèses effectuées et les résultats obtenus ;
- La soutenance s'effectuera devant un jury de 2 personnes et durera 20 minutes (10 minutes de présentation et 10 minutes de questions). La forme du support est laissée à l'appréciation des étudiants. La présentation devra introduire le problème et la démarche de résolution utilisée, puis présenter les résultats-clés de la partie guidée et de l'ouverture.

Les étudiants qui le souhaitent pourront assister à des séances de tutorat :

- Deux séances de tutorat dédiées le projet : 05/03 et 03/05.
- Deux séances de tutorat dédiées à une initiation au logiciel de calcul formel Maxima : 06/03 et XX

Afin que ces séances soient profitables aux étudiants, il est largement conseillé d'avoir préalablement travaillé sur le projet.

Le projet compte pour 1 ECTS équivalent à environ 30 heures de travail pour chaque étudiant. Il convient donc à chaque trinôme de fournir un rendu équivalent à environ 90 heures de travail.

Phase 1 : Partie guidée

Considérons la maison illustrée en Figures 1a) et b) (Hemeroscopium House, dessinée par le cabinet d'architecte Ensemble Studio), et en particulier l'élément noté A présentant un porte-à-faux de 10,0 m par rapport à l'élément B.

L'élément A est un belvédère construit en extension de la piscine située à l'intérieur du bâtiment. La hauteur d'eau dans ce "bassin" est fixée à 1,0 m. On considérera qu'au plus 10 adultes, de masse moyenne 70 kg, peuvent être présents dans ce bassin.

On assimilera la géométrie de l'enceinte du bassin à un U de $t = 2,0$ m de largeur et $h = 1,2$ m de hauteur (Cf. Figure 1c). Les trois plaques d'acier nécessaires à la construction de cette géométrie sont d'épaisseur e , que l'on considérera négligeable devant la hauteur h du bassin. La nuance de l'acier utilisée est S235 (limite d'élasticité $\sigma_e = 235$ MPa ; Module d'Young $E = 210$ GPa).

On considérera que la poutre B est suffisamment rigide pour que sa déformation soit négligeable, et que la surface de jonction entre les poutres A et B (4 m²), est suffisante pour constituer un encastrement des deux poutres l'une dans l'autre.

L'objectif opérationnel du projet est de dimensionner l'épaisseur e des plaques d'acier constituant le bassin, de manière à respecter deux critères :

- la résistance mécanique de la structure (Etat Limite Ultime, ELU) : on considérera ici que cette vérification se traduit par une limitation des contraintes normales à 60% de la limite d'élasticité du matériau ;
- une déformation admissible de la structure (Etat Limite de Service, ELS) : la flèche de la poutre devra rester inférieure à 1/200 de sa longueur.

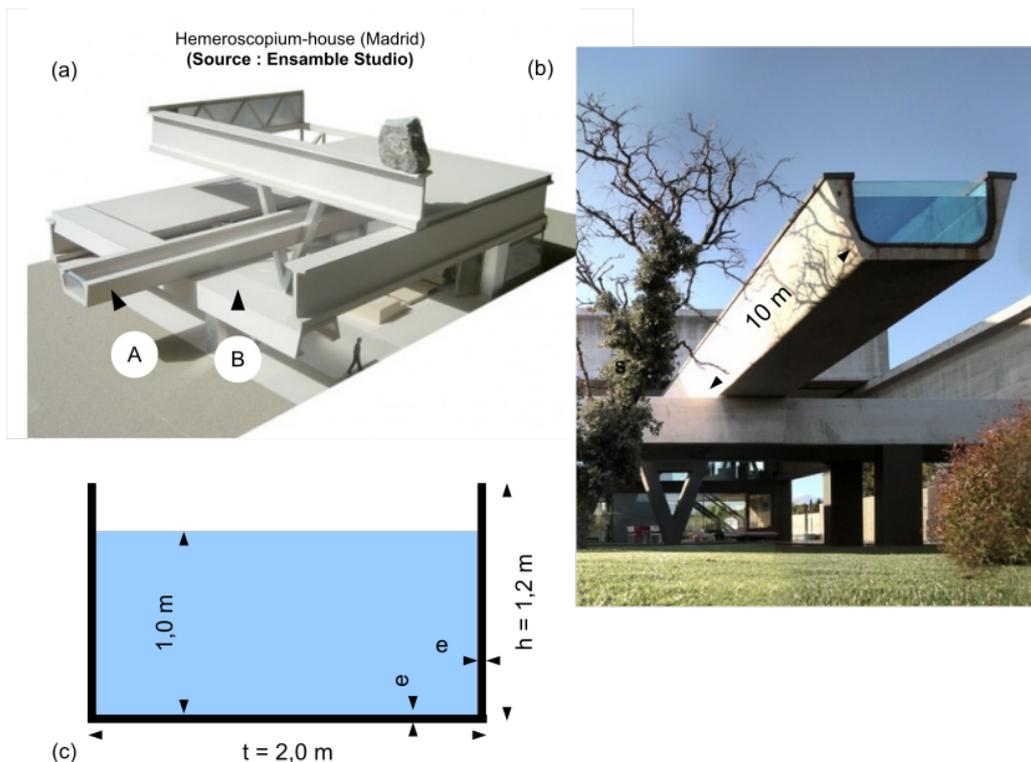


FIGURE 1 – Présentation du problème

1 Modélisation géométrique et mécanique

Question 1. Modéliser le problème sous la forme d'une poutre d'Euler-Bernoulli de module d'Young E , d'inertie I par rapport au centre de gravité de sa section, de longueur ℓ , soumise à une charge uniformément répartie q (acier + eau) et une force ponctuelle F .

Indice : la flèche de la poutre est maximale lorsque les dix baigneurs sont situés à l'extrémité du bassin.

2 Résolution analytique

Question 2. Calculer les efforts internes (N, T, M) en tout point de la poutre (i.e $\forall x \in J = [0, \ell]$), et tracer les diagrammes des efforts. On prendra en compte les conventions de signe du cours de RDM.

Question 3. En déduire les contraintes normales maximales dans la structure et en déduire l'épaisseur e minimale telle que la structure soit justifiée à l'Etat Limite Ultime.

Question 4. On admet qu'en tout point x de la fibre moyenne de la structure, le moment des efforts extérieurs est lié au déplacement vertical $u(x)$ par l'expression : $M(x) = EI u''(x)$. En déduire l'équation différentielle ordinaire régissant le déplacement vertical de la poutre.

Question 5. Déterminer les quatre conditions aux limites du problème (deux sur le déplacement au droit de l'encastrement, et deux sur les efforts à l'extrémité libre).

Question 6. Déterminer (\mathcal{P}_i) le problème de Cauchy associé à cette modélisation et montrer qu'il en existe une unique solution.

Question 7. Résoudre cette équation différentielle.

Question 8. Exprimer la flèche maximale de la poutre, et en déduire la valeur minimale de l'épaisseur e telle que cette flèche soit admissible.

Question 9. Conclure sur la largeur respectant les deux critères fixés (ELU et ELS) et tracer la déformée du bassin dans ce cas. Cette largeur de semelle sera conservée dans la suite du projet.

3 Formulation variationnelle

Dans l'optique de résoudre le problème par la méthode des éléments finis, on veut écrire la formulation variationnelle associée au problème différentiel (\mathcal{P}_i) . Soit l'espace de Sobolev $H^2(J)$ tel que

$$J \quad ; \quad H^2(J) = \{v \in L^2(J) \text{ tel que, } \forall i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket, \partial_x^i v \in L^2(J)\}$$

et l'espace V tel que :

$$V = \{v \in H^2(J) \text{ tel que } v(0) = v'(0) = 0\}$$

On munit V du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$:

$$\forall (u, v) \in V \times V, \quad \langle u, v \rangle_V = \int_J \sum_{j=0}^2 \partial_x^j u(x) \partial_x^j v(x) dx$$

et de la norme induite

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_V = \langle v, v \rangle_V$$

On supposera que $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ est un espace de Hilbert.

Question 10. Montrer que le problème différentiel (\mathcal{P}_i) peut s'écrire sous la forme du problème variationnel (\mathcal{P}_v) suivant :

$$(\mathcal{P}_v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} a(u, v) = EI \int_0^\ell u''(x) v''(x) dx \\ L(v) = - \left[F v(\ell) + q \int_0^\ell v(x) dx \right] \end{cases}$$

Question 11. Soit $v \in V$. Justifier qu'on peut écrire : $\forall x \in J, v(x) = \int_0^x v'(t) dt$ et en déduire les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \|v\|_{L^2(J)} \leq \ell \|v'\|_{L^2(J)} \\ \|v'\|_{L^2(J)} \leq \ell \|v''\|_{L^2(J)} \end{cases}$$

Question 12. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème (\mathcal{P}_v) .

Question 13. Réciproquement, sous quelle(s) condition(s) une solution du problème variationnel (\mathcal{P}_v) est-elle une solution du problème différentiel (\mathcal{P}_i) ? En déduire les efforts en $x = \ell$.

4 Résolution approchée par la méthode des éléments finis

4.1 Approximation interne

La résolution d'un problème variationnel permet d'introduire naturellement dans le cadre de l'espace de Hilbert V la notion d'approximation interne : soit $V_h \subset V$ un sous-espace vectoriel de dimension finie, tel que (\mathcal{P}_v) devienne :

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = L(v_h) \end{cases}$$

Sous les hypothèses de Lax-Milgram pour les formes $a(.,.)$ et $L(.,)$, ce problème admet une unique solution $u_h \in V_h$, tel que :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h)$$

où (M, α) sont les constantes vérifiant les conditions respectivement de continuité et de coercivité de $a(.,.)$, et $d(u, V_h)$ représente la distance de u à V_h . Cette inégalité, appelée Lemme de Céa, montre que la distance entre la solution exacte u et la solution approchée u_h est majorée uniformément par rapport au sous-espace V_h par la distance entre u et V_h . L'intérêt de ce lemme réside dans le fait qu'il suffit d'obtenir une borne d'erreur d'interpolation ($d(u, V_h)$) pour obtenir une borne d'erreur.

L'approximation interne de V par un espace V_h de dimension finie permet de ramener la résolution du problème approché à la résolution d'un problème linéaire. En effet, soit $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ une base de V_h , de telle sorte que

$$\forall x \in J, \quad u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \Phi_i(x) \tag{1}$$

Question 14. Posons $\underline{U} = (u_i)_{i \leq N}$. Montrer que \underline{U} vérifie un système linéaire de la forme $\underline{\mathcal{K}} \cdot \underline{U} = \underline{\mathcal{F}}$, en spécifiant les expressions de $\underline{\mathcal{K}}$ et $\underline{\mathcal{F}}$.

Question 15. Déduire des propriétés de $a(.,.)$ le fait que $\underline{\mathcal{K}}$ est définie positive et symétrique.

Le principe de la méthode des éléments finis est de construire des espaces d'approximation interne grâce à un maillage de J en N éléments. Plus le nombre N est grand et plus la matrice \underline{K} , appelée matrice de rigidité, est creuse (ce qui limite le coût des calculs). Les nœuds (ou sommets) des éléments sont numérotés de 0 à N tels que :

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N = \ell$$

La méthode des éléments finis se décompose donc en plusieurs étapes :

1. découper la poutre en un nombre N d'éléments et choisir une méthode d'interpolation entre les nœuds. L'approximation interne fournit l'expression des déplacements le long de la poutre (§4.3);
2. calculer les contributions des formes $a(.,.)$ et $\ell(.)$ dans chaque élément (§4.4);
3. assembler les éléments et résoudre (\mathcal{P}_h) (§4.5).

4.2 Famille d'éléments en dimension 1 : éléments finis de Lagrange et éléments finis d'Hermite

Le choix de la méthode des éléments finis dépend du choix de la fonction d'interpolation entre les valeurs aux nœuds. Notons \mathbb{P}_k l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à k .

- **Éléments de Lagrange.** Ce sont les éléments finis les plus basiques, tels que l'interpolation entre deux nœuds du maillage est linéaire. Dans ce cas, la méthode repose sur l'espace discret des fonctions globalement continues et affines sur chaque maille :

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}(J) \text{ tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \forall j \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket\}$$

De la même manière, on peut construire l'espace discret des fonctions continues (mais pas continûment dérivable), polynomiales de degré k par morceaux, de telle sorte que :

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}(J) \text{ tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_k \forall j \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket\}$$

- **Éléments de Hermite.** Les polynômes de $\mathbb{P}_{n \geq 3}$ peuvent se raccorder de manière continûment dérivable. Ainsi, les valeurs des dérivées sont aussi utilisées pour caractériser les fonctions. Les éléments de Hermite de degré 3 sont alors définis tels que :

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^1(J) \text{ tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_3 \forall j \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket\}$$

4.3 Détermination des fonctions d'interpolation

On se propose de résoudre (\mathcal{P}_h) par la méthode des éléments de Hermite. Autrement dit, la structure est découpée en N éléments (donc $N+1$ nœuds) et le déplacement $u_h \in V_h$ en tout point $x \in J$ de la structure est exprimé en fonction (1) des déplacements $u_i = u_h(x_i)$ et rotations $u'_i = u'_h(x_i)$ aux nœuds de chaque élément, et (2) des fonctions d'interpolation Φ_i, Ψ_i , de telle sorte que :

$$\forall x \in J, \quad u_h(x) = \sum_{i=0}^N u_i \Phi_i(x) + \sum_{i=0}^N u'_i \Psi_i(x)$$

On choisit, pour cette phase 1, de découper la poutre en deux éléments finis. Chaque élément $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq 2}$ a une longueur $\ell/2$. Les nœuds associés sont numérotés de 0 à 2 (élément \mathbf{e}_1 entre les nœuds 0 et 1, \mathbf{e}_2 entre 1 et 2).

Question 16. Déterminer les fonctions "mères" d'interpolation $\{\phi_j(x), \psi_j(x)\}_{j=0,1}$ sur un élément ($0 \leq x \leq \ell/2$). Par définition d'un élément de Hermite, celles-ci doivent vérifier de telle sorte que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^2, \quad \phi_j(x_i) = \delta_{ij} \quad ; \quad \phi'_j(x_i) = 0 \quad ; \quad \psi_j(x_i) = 0 \quad ; \quad \psi'_j(x_i) = \delta_{ij}$$

et tracer ces fonctions.

Les fonctions d'interpolation $\{\Phi_j, \Psi_j\}_{j=0,1,2}$ sont alors définies à partir de ces fonctions mères, tel que :

$$\begin{cases} \Phi_0|_{\mathbf{e}_1} = \phi_0 & \Phi_1|_{\mathbf{e}_1} = \phi_1 & \Phi_2|_{\mathbf{e}_1} = 0 \\ \Phi_0|_{\mathbf{e}_2} = 0 & \Phi_1|_{\mathbf{e}_2} = \phi_0 & \Phi_2|_{\mathbf{e}_2} = \phi_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \Psi_0|_{\mathbf{e}_1} = \psi_0 & \Psi_1|_{\mathbf{e}_1} = \psi_1 & \Psi_2|_{\mathbf{e}_1} = 0 \\ \Psi_0|_{\mathbf{e}_2} = 0 & \Psi_1|_{\mathbf{e}_2} = \psi_0 & \Psi_2|_{\mathbf{e}_2} = \psi_1 \end{cases}$$

Question 17. Tracer les fonctions $\{\Phi_j(x), \Psi_j(x)\}_{j=0,1,2}$ sur J .

4.4 Calcul des matrices élémentaires

Par linéarité de l'intégrale, les formes $a(.,.)$ et $\ell(.)$ du problème (\mathcal{P}_h) peuvent être découpées sur chaque élément $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq 2}$:

$$\forall (u_h, v_h) \in V_h \times V_h, \quad a(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^N a_{\mathbf{e}_i}(u_h, v_h) \quad ; \quad L(v_h) = \sum_{i=1}^N L_{\mathbf{e}_i}(v_h)$$

où $a_{\mathbf{e}_i}(.,.)$ et $L_{\mathbf{e}_i}(.)$ sont les contributions de $a(.,.)$ et $L(.)$ pour l'élément \mathbf{e}_i .

Question 18. Montrer que $a_{\mathbf{e}_1}(.,.)$, la contribution de $a(.,.)$ pour l'élément \mathbf{e}_1 , peut s'écrire sous la forme matricielle suivante, où $\underline{\mathcal{K}}_{\mathbf{e}_1}$ est appelée matrice de rigidité de l'élément \mathbf{e}_1 :

$$a_{\mathbf{e}_1}(u_h, v_h) = {}^t \underline{V}_{\mathbf{e}_1} \cdot \underline{\mathcal{K}}_{\mathbf{e}_1} \cdot \underline{U}_{\mathbf{e}_1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\mathcal{K}}_{\mathbf{e}_1} = \frac{4EI}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{24}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} & -\frac{24}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\ \frac{6}{\ell} & 2 & -\frac{6}{\ell} & 1 \\ -\frac{24}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} & \frac{24}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} \\ \frac{6}{\ell} & 1 & -\frac{6}{\ell} & 2 \end{bmatrix} \\ \underline{U}_{\mathbf{e}_1} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \\ u_1 \\ u'_1 \end{pmatrix} ; \quad \underline{V}_{\mathbf{e}_1} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v'_0 \\ v_1 \\ v'_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Question 19. De même, calculer $\ell_{\mathbf{e}_1}(\tilde{v})$, la contribution de $\ell(.)$ pour l'élément \mathbf{e}_1 puis montrer que $\ell_{\mathbf{e}_1}(\tilde{v})$ peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\ell_{\mathbf{e}_1}(\tilde{v}) = {}^t \underline{V}_{\mathbf{e}_1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{\mathbf{e}_1} \quad \text{avec} \quad \underline{\mathcal{F}}_{\mathbf{e}_1} = -\frac{q\ell}{48} \begin{pmatrix} 12 \\ \ell \\ 12 \\ -\ell \end{pmatrix}$$

Question 20. Calculer de la même manière les contributions des formes $a(.,.)$ et $\ell(.)$ pour l'élément \mathbf{e}_2 .

4.5 Assemblage des éléments et résolution du système linéaire

La phase finale d'assemblage consiste à sommer les deux contributions, par linéarité, de telle sorte que :

$$a(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^2 a_{\mathbf{e}_i}(u_h, v_h) \quad ; \quad \ell(v_h) = \sum_{i=1}^2 \ell_{\mathbf{e}_i}(v_h)$$

Question 21. Calculer la matrice de rigidité $\underline{\mathcal{K}}$ et le vecteur force $\underline{\mathcal{F}}$ tels que le problème (\mathcal{P}_h) s'écrive :

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} \text{Trouver } \underline{U} \in V_h \text{ tel que} \\ \forall \underline{V} \in V_h, {}^t \underline{V} \cdot \underline{\mathcal{K}} \cdot \underline{U} = {}^t \underline{V} \cdot \underline{\mathcal{F}} \end{cases}$$

Question 22. Appliquer les conditions aux limites en déplacement du problème puis résoudre numériquement le problème (\mathcal{P}_h) . Présenter graphiquement les résultats obtenus et les comparer avec la solution analytique. Qu'en concluez vous ?

Phase 2 : Ouverture

Quatre ouvertures de difficulté croissante (* à ***) sont proposées. Poursuivre l'analyse à travers l'étude d'un ou plusieurs points suivants, ou d'un sujet de votre choix. Le niveau d'attente dépendra de la difficulté du sujet étudié.

Ouverture 1 (*). Ecrire un algorithme de calcul permettant d'appliquer la méthode des éléments finis avec N éléments. Détailler brièvement le programme écrit puis présenter graphiquement les différents résultats obtenus lorsque l'on augmente la finesse du maillage.

Ouverture 2 (**). Etudier l'ouverture 1 en prenant en compte dans l'algorithme la possibilité de mailler la poutre avec des éléments de tailles variables.

Ouverture 3 (**). Reprendre l'analyse du problème en ajoutant une force ponctuelle en $x = \ell/4$.

Ouverture 4 (***). Reprendre l'analyse du problème en ajoutant un appui simple en $x = \ell/4$.