

Etude de la flèche d'un pont bipoutre mixte

2018

Considérons le pont mixte bipoutre acier-béton à une travée dont les caractéristiques géométriques sont détaillées sur la figure 1 et les caractéristiques mécaniques listées dans le tableau 1. Supposons cet ouvrage soumis à deux sollicitations : son poids propre p réparti uniformément et une force F ponctuelle de 80 t appliquée au point D ($X = d$; $Y=0$; $Z = 0$). Cette force ponctuelle est supposée modéliser la présence de deux camions côte-à-côte sur le tablier. L'ouvrage est supposé en appui simple sur ses deux extrémités.

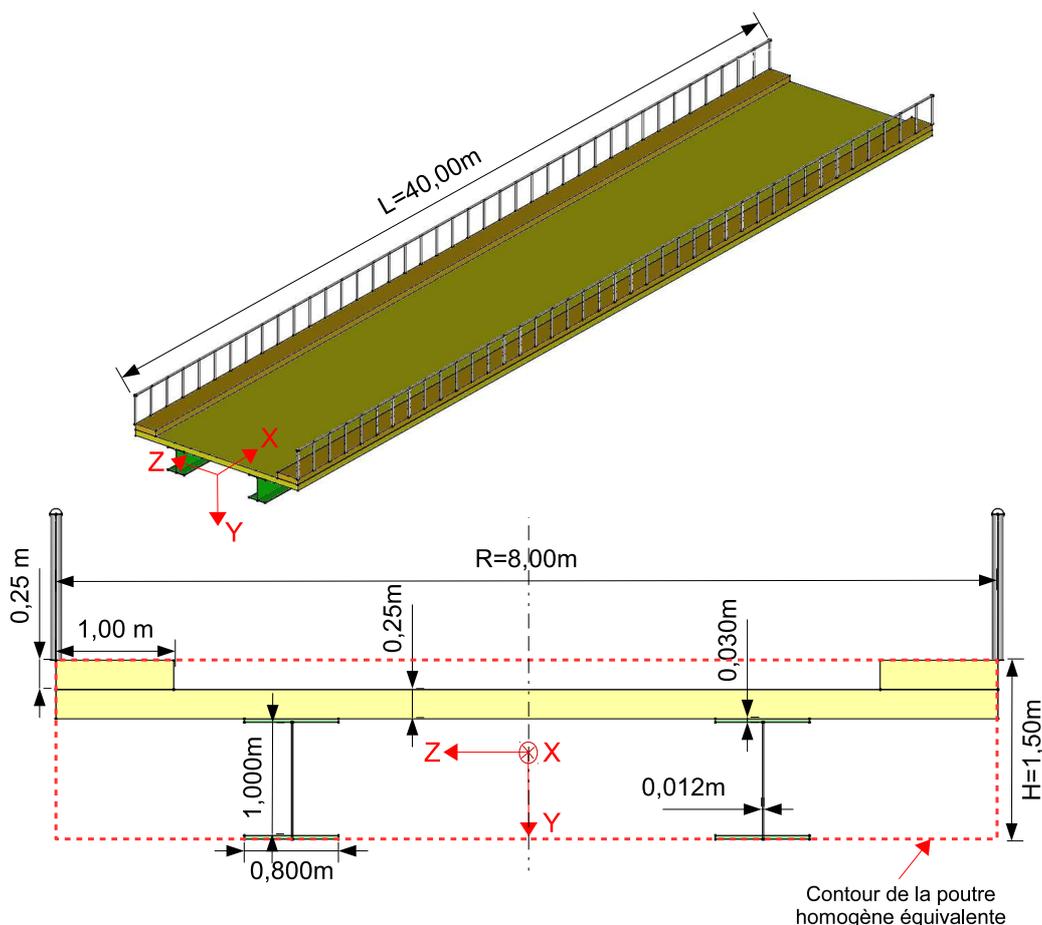


FIGURE 1 – Caractéristiques géométriques d'uproblème

L'objectif du projet est de calculer la déformée de l'ouvrage sous l'effet de ces sollicitations. Pour cela, l'ouvrage sera tout d'abord modélisé sous la forme d'une poutre parallélépipédique équivalente, puis résolu analytiquement. Dans un second temps, une solution approchée du problème sera recherchée par la méthode des éléments finis et les résultats obtenus comparés à la solution analytique. Les influences

du maillage et du type d'élément choisi seront étudiées. Un second objectif est ainsi de vous sensibiliser au fonctionnement, à la puissance et aux limites de cette méthode de calcul largement utilisée dans la pratique de nos jours.

Ce sujet constitue la structure de la réflexion, dont chaque question pourra faire l'objet de développements complémentaires.

Partie d'ouvrage	Matériaux	Comportement	$\rho(\text{kg.m}^{-3})$	E (GPa)	$\nu(-)$
Tablier et trottoirs	Béton armé	Élastique linéaire isotrope	2500	30	0
Poutres	Acier	Élastique linéaire isotrope	7500	210	0

TABLE 1 – Caractéristiques mécaniques des matériaux.

1 Modélisation géométrique et mécanique

Modéliser le problème sous la forme d'une poutre homogène équivalente de dimensions $L \times R \times H$. En particulier, calculer ρ_{eq} et E_{eq} respectivement la masse volumique et le module d'Young du matériau équivalent. Pour ce faire, considérer que la rigidité en flexion de la poutre ($E.I/L^3$) du matériau à une association en parallèle de ressorts, sous la forme (en simplifiant par L^3) :

$$E_{eq}.I_{eq-Z} = E_{dalle}.I_{dalle-Z} + 2 E_{trottoir}.I_{trottoir-Z} + 2 E_{poutre}.I_{poutre-Z}$$

Indice : l'ensemble des inertias devra être calculée par rapport au même axe (Z) situé au milieu de la section homogène équivalente

2 Résolution analytique

On considérera que les déplacements de l'ouvrage sont uniquement verticaux, i.e. en tout point :

$$\underline{u}(x, y, z) = u(x)\underline{Y}$$

a) Déterminer l'équation différentielle régissant le déplacement vertical de l'ouvrage.

Indice : on considèrera que le moment selon l'axe Z des efforts intérieurs $\mathcal{M}_Z(x)$ en tout point de la fibre moyenne a pour expression¹ :

$$\mathcal{M}_Z(x) = E_{eq}.I_{eq-Z} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

b) Déterminer (\mathcal{P}_i) le problème de Cauchy associé à cette modélisation et montrer qu'il en existe un unique solution.

c) Résoudre (\mathcal{P}_i) et représenter la déformée de l'ouvrage pour $d = 0; 10; 20$ m.

d) Considérant une limite élastique de l'acier σ_e de 235 MPa, les poutres sont elles suffisamment résistantes pour reprendre les chargements précédents? Si oui, avec quel coefficient de sécurité?

Indice : calculer le moment \mathcal{M}_Z maximal le long de l'ouvrage. En déduire le moment repris par chaque poutre ($\mathcal{M}_{poutre-Z} = E_{poutre}.I_{poutre-Z}$), puis la répartition des contraintes normales dans la hauteur du profilé métallique.

3 Formulation variationnelle

a) Soient l'espace de Sobolev $H_{[0,L]}^1 = \{v \in L_{[0,L]}^2, v' \in L_{[0,L]}^2\}$ et l'espace $V = \{v \in H_{[0,L]}^1, v(0) = v(L) = 0\}$ associé au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, tel que :

$$\forall (u, v) \in V \times V, \quad \langle u, v \rangle_V = \int_0^L [u(x)v(x) + u'(x)v'(x)] dx$$

1. La démonstration du calcul des efforts intérieurs n'est pas demandée. Celle-ci pourra être trouvée dans

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ est un espace de Hilbert.

Montrer que le problème différentiel (\mathcal{P}_i) peut s'écrire sous la forme du problème variationnel suivant :

$$(\mathcal{P}_v) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, a(u, v) = \ell(v) \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} a(u, v) = E_{eq} \cdot I_{eq-Z} \int_0^L u'(x) v'(x) dx \\ \ell(v) = \int_0^L \left[p \frac{x}{2} (L-x) - F d \frac{x}{L} \right] dx + F \left[\int_0^d x v(x) dx + \int_d^L d v(x) dx \right] \end{cases} \quad (1)$$

b) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème (\mathcal{P}_v) .

Indice : Pour démontrer la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$, on pourra s'appuyer sur l'inégalité de Poincaré-Friedrichs.

4 Résolution approchée par la méthode des éléments finis

L'espace V étant un espace vectoriel de dimension infinie, tout élément de V peut se décomposer sur la base hilbertienne $(\Psi_i)_{i \geq 1}$, de telle sorte que

$$\forall x \in [0, L], \quad u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \Psi_i(x) \quad (2)$$

Le problème approché de Galerkin consiste à travailler dans un espace V_N de dimension fini N , tel que

$$V_N = \{ \tilde{u} \in V, \forall x \in [0, L], \quad \tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^N u_i \Psi_i(x), (u_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N \}$$

La méthode des éléments finis consiste alors à résoudre le problème approché suivant, en découpant la structure en N éléments :

$$(\mathcal{P}_N) \begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in V_N \text{ tel que} \\ \forall \tilde{v} \in V_N, a(\tilde{u}, \tilde{v}) = \ell(\tilde{v}) \end{cases}$$

4.1 Résolution approchée par quatre éléments finis linéaires

Découper la poutre en quatre éléments de longueur $L/4$ que l'on notera respectivement $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ et numéroter les noeuds associés (élément \mathbf{e}_1 entre les noeuds 1 et 2, \mathbf{e}_2 entre 2 et 3, ...). Dans un premier temps, considérons que \tilde{u} évolue linéairement entre deux noeuds voisins (éléments finis de Lagrange de degré 1). La démarche consiste à calculer les différentes fonctions d'interpolation Ψ_i puis d'appliquer la formulation variationnelle (\mathcal{P}_N) aux champs $\tilde{u} \in V_N$ et $\tilde{v} \in V_N$ cinématiquement admissibles.

Par linéarité de l'intégrale, les formes $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$ du problème (\mathcal{P}_N) peuvent être découpées sur chaque élément de longueur $L/4$. La phase finale d'assemblage consistera à sommer les quatre intégrales, de telle sorte que :

$$a(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{i=1}^4 a_{\mathbf{e}_i}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad ; \quad \ell(\tilde{v}) = \sum_{i=1}^4 \ell_{\mathbf{e}_i}(\tilde{v})$$

a) Ainsi dans un premier temps, raisonnons sur l'élément \mathbf{e}_1 . Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{L}{4} \right], \quad \Psi_1(x) = 1 - \frac{4x}{L} \quad ; \quad \Psi_2(x) = \frac{4x}{L} \quad ; \quad \Psi_3(x) = \Psi_4(x) = \Psi_5(x) = 0$$

b) Calculer $a_{\mathbf{e}_1}(\tilde{u}, \tilde{v})$, la contribution de $a(\cdot, \cdot)$ pour l'élément \mathbf{e}_1 puis montrer que $a_{\mathbf{e}_1}(\tilde{u}, \tilde{v})$ peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$a_{\mathbf{e}_1}(\tilde{u}, \tilde{v}) = {}^t \underline{V}_{\mathbf{e}_1} \cdot \underline{\mathcal{K}}_{\mathbf{e}_1} \cdot \underline{U}_{\mathbf{e}_1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\mathcal{K}}_{\mathbf{e}_1} = \frac{4 E_{eq} \cdot I_{eq-Z}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{U}_{\mathbf{e}_1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{V}_{\mathbf{e}_1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\underline{\mathcal{K}}_{\mathbf{e}_1}$ est appelée **matrice de rigidité** de l'élément \mathbf{e}_1 .

c) De même, calculer $\ell_{\mathbf{e}_1}(\tilde{v})$, la contribution de $\ell(\cdot)$ pour l'élément \mathbf{e}_1 puis montrer que $\ell_{\mathbf{e}_1}(\tilde{v})$ peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\ell_{\mathbf{e}_1}(\tilde{v}) = {}^t \underline{V}_{\mathbf{e}_1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{\mathbf{e}_1} \quad \text{avec} \quad \underline{\mathcal{F}}_{\mathbf{e}_1} = \frac{L^2}{96} \begin{pmatrix} F \left(1 - \frac{d}{L}\right) + \frac{7}{16} p L \\ 2F \left(1 - \frac{d}{L}\right) + \frac{13}{16} p L \end{pmatrix}$$

d) Répéter les étapes b) et c) afin de calculer les contributions des formes $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$ pour les éléments $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$

e) **Etape d'assemblage** : en déduire la matrice de rigidité $\underline{\mathcal{K}}$ et le vecteur force $\underline{\mathcal{F}}$ tels que le problème $(\mathcal{P}_{N=4})$ s'écrive :

$$(\mathcal{P}_{N=4}) \begin{cases} \text{Trouver } \underline{U} \in V_5 \text{ tel que} \\ \forall \tilde{V} \in V_5, {}^t \underline{V} \cdot \underline{\mathcal{K}} \cdot \underline{U} = {}^t \underline{V} \cdot \underline{\mathcal{F}} \end{cases}$$

f) Appliquer les conditions aux limites en déplacement du problème puis résoudre analytiquement le problème $(\mathcal{P}_{N=4})$.

g) Application numérique : résoudre $(\mathcal{P}_{N=4})$ dans le cas $d = 10$ m et comparer la solution obtenue avec la solution analytique calculée en question 2. Qu'en concluez vous ?

h) Votre modèle aux éléments finis vous permet-il de calculer la flèche maximale ? Si non, augmenter la finesse du maillage afin de tendre vers ce résultat. Ecrire l'algorithme de calcul correspondant, dans le langage de votre choix.

4.2 Ouverture du problème

Pistes d'amélioration :

1) Reprendre le même raisonnement avec 4 éléments finis de Lagrange de degré 2. Chaque élément comporte alors 3 noeuds (1 noeud à chaque extrémité et 1 noeud central) et $u(x)$ évolue de manière quadratique au sein de chaque élément.

2) Quels seraient les changements à apporter au raisonnement précédent dans le cas :

- de l'ajout d'un appui central (l'EDO sera modifiée et définie par plus de morceaux) ?
- d'une loi de comportement différente (élasticité non linéaire, élasto-plasticité, ...) ?
- ...