Résolution d'EDP en domaine spatial borné

Antoine RALLU

antoine.rallu@entpe.fr, bureau F005
https://arallu.perso.math.cnrs.fr/

Juin 2024

L'école de l'aménagement durable des territoires

Sommaire : Description de la méthode

Schéma de résolution

Soit le problème en dimension spatiale bornée pilotée par $w(t,x)$:

$$\begin{aligned}
\alpha(t)\partial_t^2 w + \beta(t)\partial_t w =& a(x)\partial_x^2 w + b(x)\partial_x w \\
&+ \left(c(x)+\gamma(t)\right) w \quad \forall t>0 \forall x \in]x_1, x_2[\qquad (1a)\\
s_1\partial_x w + k_1 w =& 0 \quad x = x_1 \qquad (1b)\\
s_2\partial_x w + k_2 w =& 0 \quad x = x_2 \qquad (1c)\\
w =& f(x) \quad t = 0 \qquad (1d)\\
\partial_t w =& g(x) \quad t = 0 \qquad (1e)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c) \in \mathcal{C}^0\\
&\alpha(t) \geq 0,\ a(x) \geq 0\\
&|s_1| + |k_1| > 0\,;\ |s_2| + |k_2| > 0
\end{aligned}$$

Schéma de résolution

Soit le problème en dimension spatiale bornée pilotée par $w(t,x)$:

$$\begin{aligned}\alpha(t)\partial_t^2 w + \beta(t)\partial_t w =& a(x)\partial_x^2 w + b(x)\partial_x w \\ &+ (c(x)+\gamma(t))\, w \quad \forall t>0 \forall x \in]x_1, x_2[\end{aligned} \tag{1a}$$

$$s_1\partial_x w + k_1 w = 0 \quad x = x_1 \tag{1b}$$

$$s_2\partial_x w + k_2 w = 0 \quad x = x_2 \tag{1c}$$

$$w = f(x) \quad t = 0 \tag{1d}$$

$$\partial_t w = g(x) \quad t = 0 \tag{1e}$$

Remarque :

- Si $\alpha(t) \equiv 0$ l'EDP est parabolique et la condition initiale g n'existe pas.
- Si $\alpha(t) < 0$ et $a(x) > 0$ l'EDP est elliptique avec des conditions aux limites

Schéma de résolution

1. On pose
$$w(t,x) = \phi(x)\psi(t) \tag{2}$$
2. On introduit (2) dans l'équation différentielle (1a) tel que (si possible):
$$F_1(x,\phi,\phi',\phi'') = F_2(t,\psi,\psi',\psi'') \tag{3}$$
3. Les variables étant séparées, (3) $= -\lambda \in \mathbb{R}$
4. On cherche les modes propres de l'équation qui satisfait les CL (1b), (1c): $\{\lambda_n, \phi_n(x)\}$
5. On résout l'EDO en ψ pour chaque mode propre $\psi_n(t)$
6. La solution est une série $w(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n(x)\psi_n(t)$
7. Les constantes sont déterminées par les CI (1d), (1e)

Dérivation des équations et CL

En introduisant (2) $w(t,x) = \phi(x)\psi(t) \neq 0$ dans l'équation différentielle (1a) et en divisant par $w(t,x)$ on obtient:

$$\alpha(t)\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} + \beta(t)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} - \gamma(t) = a(x)\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} + b(x)\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} + c(x)$$

$\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} F_1(x,\phi,\phi',\phi'') = a(x)\dfrac{\phi''(x)}{\phi(x)} + b(x)\dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)} + c(x) = -\lambda \\ F_2(t,\psi,\psi',\psi'') = \alpha(t)\dfrac{\psi''(t)}{\psi(t)} + \beta(t)\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} - \gamma(t) = -\lambda \end{cases}$$

Dérivation des équations et CL

Soient les deux EDO :

$$a(x)\phi''(x) + b(x)\phi'(x) + (c(x) + \lambda)\,\phi(x) = 0 \tag{4a}$$

$$\alpha(t)\psi''(t) + \beta(t)\psi'(t) + (-\gamma(t) + \lambda)\,\psi(t) = 0 \tag{4b}$$

avec les CL

$$\begin{cases} s_1\phi'(x) + k_1\phi(x)w = 0 & x = x_1 \\ s_2\phi'(x) + k_2\phi(x)w = 0 & x = x_2 \end{cases} \tag{5}$$

Le problème aux valeurs propres est formé par $\{(4a), (5)\}$.

Valeurs et vecteurs propres

Soient $x \mapsto (\tilde{\phi}_1(x;\lambda), \tilde{\phi}_2(x;\lambda))$ deux solutions linéairement indépendantes de (4a). Alors

$$\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R} / \forall x \in]x_1, x_2[,\ \phi(x) = C_1 \tilde{\phi}_1(x;\lambda) + C_2 \tilde{\phi}_2(x;\lambda) \tag{6}$$

En introduisant (6) dans (5) on obtient:

$$\begin{cases} C_1 \left(s_1 \tilde{\phi}_1' + k_1 \tilde{\phi}_1 \right) |_{x=x_1} + C_2 \left(s_1 \tilde{\phi}_2' + k_1 \tilde{\phi}_2 \right) |_{x=x_1} = 0 \\ C_1 \left(s_2 \tilde{\phi}_1' + k_2 \tilde{\phi}_1 \right) |_{x=x_2} + C_2 \left(s_2 \tilde{\phi}_2' + k_2 \tilde{\phi}_2 \right) |_{x=x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 \varepsilon_{11}(\lambda) + C_2 \varepsilon_{12}(\lambda) = 0 \\ C_1 \varepsilon_{21}(\lambda) + C_2 \varepsilon_{22}(\lambda) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \varepsilon_{ij}(\lambda) = \left(s_i \tilde{\phi}_j' + k_i \tilde{\phi}_j \right) |_{x=x_i} \tag{7}$$

Valeurs et vecteurs propres

Système (7) non trivial si

$$\varepsilon_{11}(\lambda)\varepsilon_{22}(\lambda) - \varepsilon_{21}(\lambda)\varepsilon_{12}(\lambda) = 0 \tag{8}$$

Le solutions de (8) sont les valeurs propres $\{\lambda_n\}$. Au final, (4a) a pour solutions les vecteurs propres

$$\phi_n(x) = \varepsilon_{12}(\lambda_n)\tilde{\phi}_1(x;\lambda_n) - \varepsilon_{11}(\lambda_n)\tilde{\phi}_2(x;\lambda_n)$$

Problème de Sturm-Liouville régulier

L'équation (4a) peut être réécrite comme un problème de Sturm-Liouville régulier:

$$\left(p(x)\phi'(x)\right)' + \left(\lambda\rho(x) - q(x)\right)\phi(x) = 0 \tag{9}$$

Avec (p, p', q, ρ) des fonctions continues telles que :

$$p(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{b(s)}{a(s}ds\right) > 0\,;\ q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}p(x)\,;\ \rho(x) = \frac{1}{a(x)}p(x) > 0$$

Problème de Sturm-Liouville régulier

Théorème

$\mathrm{H}^2\left([x_1,x_2],\rho(x)dx\right)$ associé au PS $\langle f,g\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)\rho(x)dx$ est un espace de Hilbert.

On note $V = \mathrm{H}_0^2\left([x_1,x_2],\rho(x)dx\right) = \left\{f \in \mathrm{H}^2\left([x_1,x_2],\rho(x)dx\right)/f \text{ suit } (5)\right\}$

Théorème

Soit $L\phi$ l'opérateur $L\phi = -\frac{1}{\rho}\left[(p\phi')' - q\phi\right]$. Alors $L\phi$ est auto-adjoint, i.e

$$\forall(\phi,\psi) \in V^2, \langle L\phi,\psi\rangle = \langle\phi, L\psi\rangle$$

Démo :

$$\langle L\phi,\psi\rangle = \int_\Omega -(p\phi')'\psi dx + \int_\Omega q\phi\psi dx$$

$$(\text{double IPP}) = \left[p\left(\psi'\phi - \phi'\psi\right)\right]_{x_1}^{x_2} + \langle\phi, L\psi\rangle = \langle\phi, L\psi\rangle$$

Problème de Sturm-Liouville régulier

Théorème

Le problème de Sturm-Liouville régulier (9) admet des valeurs propres réelles simples et orthogonales pour le produit scalaire de V.

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de $L\phi$ où $\phi \in V$. Alors

$$\langle L\phi, \phi\rangle = \lambda\langle \phi, \phi\rangle \text{ et } \langle \phi, L\phi\rangle = \bar{\lambda}\langle \phi, \phi\rangle$$

  or $L\phi$ est auto-adjoint donc $\lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$.

- Soient (λ_n, ϕ_n) et (λ_m, ϕ_m) deux modes de $L\phi$.

$$\langle L\phi_n, \phi_m\rangle = \lambda_n\langle \phi_n, \phi_m\rangle = \langle \phi_n, L\phi_m\rangle = \lambda_m\langle \phi_n, \phi_m\rangle$$

  Ainsi $(\lambda_n - \lambda_m)\langle \phi_n, \phi_m\rangle = 0$. Si $\lambda_n \neq \lambda_m$, alors $\langle \phi_n, \phi_m\rangle = 0$.

Problème de Sturm-Liouville régulier

Théorème

Le problème de Sturm-Liouville régulier (9) admet des valeurs propres réelles simples et orthogonales pour le produit scalaire de V.

- Chaque mode est simple : Si (ϕ, ψ) sont deux modes alors

$$\begin{cases} s_1\phi'(x_1) + k_1\phi(x_1) = 0 \\ s_1\psi'(x_1) + k_1\psi(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \det \begin{bmatrix} \phi'(x_1) & \phi(x_1) \\ \psi'(x_1) & \psi(x_1) \end{bmatrix} = 0 = \phi'(x_1)\psi(x_1) - \psi'(x_1)\phi(x_1)$$

Donc $\exists c \in \mathbb{R} / \ \phi(x_1) = c\psi(x_1)$

Problème de Sturm-Liouville régulier

Le problème (9) avec les CL (5) possède donc les propriétés suivantes:

- Le nombre de valeurs propres négatives est fini:

$$\forall j \in \mathbb{N}^{\star},\ \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{j \to \infty} \lambda_j = +\infty$$

- $\phi_n \in \mathrm{L}^2\left([x_1, x_2], \rho(x)dx\right)$:

$$\forall n \neq m,\ \int_{x_1}^{x_2} \phi_n(x)\phi_m(x)\rho(x)dx = 0$$

- Si $q(x) \geq 0$; $s1k1 \leq 0$; $s2k2 \geq 0$ alors $\forall j \in \mathbb{N},\ \lambda_j \geq 0$
  1. Si $q \equiv 0$ et $k_1 = k_2 = 0$ alors $\min\limits_{j \in \mathbb{N}} = \lambda_1 = 0$ et $\phi_1 \equiv$constante
  2. Sinon, toutes les valeurs propres sont positives si les CL (5) sont respectées.

Sommaire : Résolution de problèmes paraboliques à une variable d'espace

Fonction de Green

Soit le problème parabolique de la forme

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) - \mathcal{L}_x[w](t,x) = S(t,x) \qquad \forall t > 0, \forall x \in]x_1, x_2[\\ \mathcal{L}_x[w] = a(t,x)\partial_2^2 w(t,x) + b(t,x)\partial_2 w(t,x) + c(t,x)w(t,x) \\ w(0,x) = f(x) \\ s_1 \partial_x w(t,x_1) + k_1 w(t,x_1) = 0 \\ s_2 \partial_x w(t,x_2) + k_2 w(t,x_2) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Remarque : Si les CL ne sont pas homogènes, on se ramène à des CL homogènes par changement de variables.

Fonction de Green

La solution s'écrit $\forall t \geq 0, \forall x \in [x_1, x_2]$,

$$\begin{aligned} w(t,x) &= S \star \mathcal{E}_e(t,x) + f \star \mathcal{E}_e|_{\tau=0}(t,x) \\ &= \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} S(\tau,\xi) G(t,x;\tau,\xi) d\tau d\xi + \int_{x_1}^{x_2} f(\xi) G(t,x;0,\xi) d\xi \end{aligned}$$

avec $G(t,x;\tau,\xi)$ fonction de Green du problème homogène

$$\begin{cases} \partial_t G(t,x) - \mathcal{L}_x[G](t,x) = 0 & \forall t > \tau, \forall x \in]x_1, x_2[\\ G(\tau,x) = \delta(x-\xi) \\ s_1 \partial_x G(t,x_1) + k_1 G(t,x_1) = 0 \\ s_2 \partial_x G(t,x_2) + k_2 G(t,x_2) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

soit la solution fondamentale :

$$\mathcal{E}_e(t,x;\tau,\xi) = G(t,x;\tau,\xi) H_0(t-\tau)$$

Exemple

Soit le problème de diffusion dans un espace $\Omega =]0, \ell[$:

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) - a\partial_x^2 w(t,x) = S(t,x) & \forall t > 0, \forall x \in \Omega \\ w(0,x) = f(x) \\ w(t,0) = h_1(t) \\ w(t,\ell) = h_2(t) \end{cases} \tag{12}$$

Par changement de variable

$$\tilde{w}(t,x) = w(t,x) - \left[h_1(t) + \frac{x}{\ell}\left(h_2(t) - h_1(t)\right)\right]$$

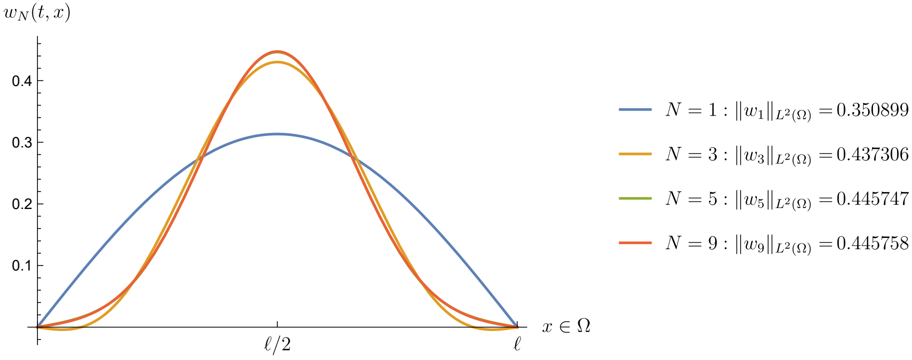
Exemple

Les conditions aux limites du nouveau problème (18) sont homogènes:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{w}(t,x) - a\partial_x^2 \tilde{w}(t,x) = \tilde{S}(t,x) = S(t,x) - \left[h_1'(t) + \frac{x}{\ell}\left(h_2'(t) - h_1'(t) \right) \right] \\ \tilde{w}(0,x) = \tilde{f}(x) = f(x) - \left[h_1(0) + \frac{x}{\ell}\left(h_2(0) - h_1(0) \right) \right] \\ \tilde{w}(t,0) = 0 \\ \tilde{w}(t,\ell) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

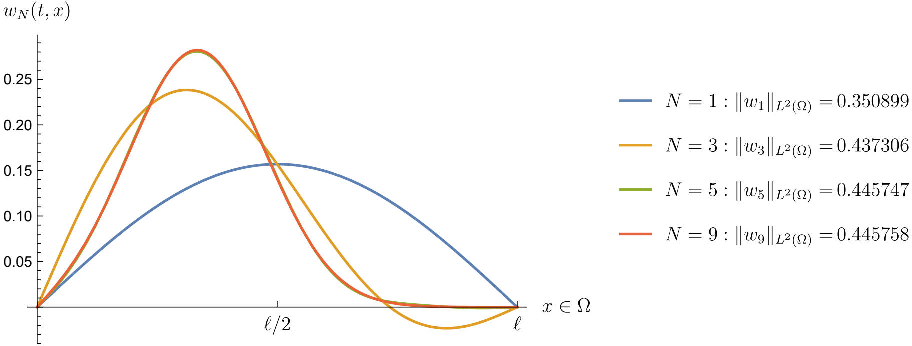
Illustrations de l'exercice

$(a = 1m/s, \ell = 10m, f(x) = e^{-(x-\frac{\ell}{2})^2}, S \equiv 0, h_1 \equiv h_2 \equiv 0)$



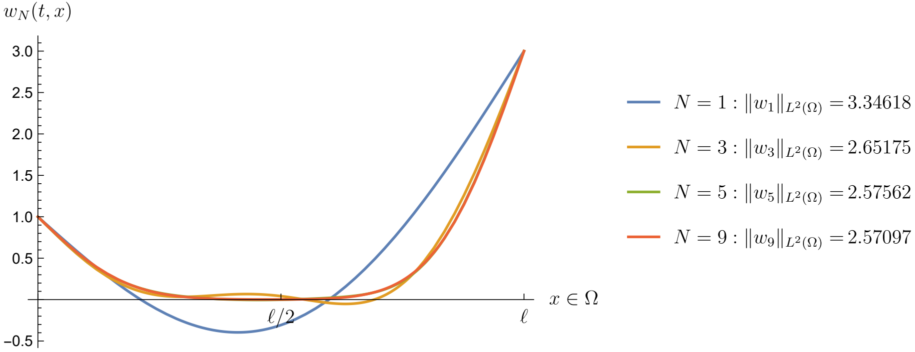
Illustrations de l'exercice

$(a = 1m/s, \ell = 10m, S(t,x) = \delta_0(x - \frac{\ell}{3})\delta_0(t), f \equiv 0, h_1 \equiv h_2 \equiv 0)$



Illustrations de l'exercice

$(a = 1m/s, \ell = 10m, f \equiv 0, S \equiv 0, h_1(t) = 1, h_2(t) = 3)$



Exemple

Soit le problème de diffusion dans un espace $\Omega =]0, \ell[\times]0, L[$:

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x,y) - a\left[\partial_x^2 w(t,x,y) + \partial_y^2 w(t,x,y)\right] = S(t,x) \quad \forall t > 0, \text{dans } \Omega \\ w(0,x) = f(x,y) \\ w(t,x,y) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

Sommaire : Résolution de problèmes hyperboliques à une variable d'espace

Fonction de Green

Soit le problème parabolique de la forme

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t,x) + \sigma(t,x)\partial_t w(t,x) - \mathcal{L}_x[w](t,x) = S(t,x) \qquad \forall t > 0, \forall x \in]x_1, x \\ \mathcal{L}_x[w] = a(t,x)\partial_2^2 w(t,x) + b(t,x)\partial_2 w(t,x) + c(t,x)w(t,x) \\ w(0,x) = f(x) \\ \partial_t w(0,x) = g(x) \\ s_1 \partial_x w(t,x_1) + k_1 w(t,x_1) = 0 \\ s_2 \partial_x w(t,x_2) + k_2 w(t,x_2) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Remarque : Si les CL ne sont pas homogènes, on se ramène à des CL homogènes par changement de variables.

Fonction de Green

La solution s'écrit $\forall t \geq 0, \forall x \in [x_1, x_2]$,

$$w(t,x) = \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} S(\tau,\xi) G(t,x;\tau,\xi) d\tau d\xi - \int_{x_1}^{x_2} f(\xi) \partial_\tau G(t,x;\xi,0) d\xi$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left(g(\xi) + f(\xi)\sigma(0,\xi)\right) G(t,x;0,\xi) d\xi$$

avec $G(t,x;\tau,\xi)$ fonction de Green du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 G(t,x) + \sigma(t,x)\partial_t G(t,x) - \mathcal{L}_x[G](t,x) = 0 & \forall t > \tau, \forall x \in]x_1, x_2[\\ G(\tau,x) = 0 \\ \partial_t G(\tau,x) = \delta(x-\xi) \\ s_1 \partial_x G(t,x_1) + k_1 G(t,x_1) = 0 \\ s_2 \partial_x G(t,x_2) + k_2 G(t,x_2) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Exemple

Soit le problème de propagation d'ondes dans un espace $\Omega =]0, \ell[$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t,x) - c^2 \partial_2^2 w(t,x) = S(t,x) & \forall t > 0, \forall x \in \Omega \\ w(0,x) = f(x) \\ \partial_t w(0,x) = g(x) \\ \partial_x w(t,0) = 0 \\ w(t,\ell) = W(t) \end{cases} \tag{17}$$

Par changement de variable

$$\tilde{w}(t,x) = w(t,x) - \left[h_1(t) + \frac{x}{\ell} \left(h_2(t) - h_1(t) \right) \right]$$

Exemple

Les conditions aux limites du nouveau problème (18) sont homogènes:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{w}(t,x) - a\partial_2^2 \tilde{w}(t,x) = \tilde{S}(t,x) = S(t,x) - \left[h_1'(t) + \dfrac{x}{\ell}\left(h_2'(t) - h_1(t)\right)\right] \\ \tilde{w}(0,x) = \tilde{f}(x) - \left[h_1(0) + \dfrac{x}{\ell}\left(h_2(0) - h_1(0)\right)\right] \\ \tilde{w}(t,x_1) = 0 \\ \tilde{w}(t,x_2) = 0 \end{cases} \tag{18}$$