Problèmes de Cauchy

Antoine RALLU

antoine.rallu@entpe.fr, bureau F005
https://arallu.perso.math.cnrs.fr/

Juin 2024

L'école de l'aménagement durable des territoires

Sommaire : Introduction

EDP linéaire du 2nd ordre

Soit une fonction $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation différentielle :

$$\underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{H}}_u(\underline{x}) + \underline{B}(\underline{x}).\underline{\nabla} u(\underline{x}) + c(\underline{x})u(\underline{x}) = f(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x} \in \Omega \tag{1}$$

$\left(\underline{\underline{H}}_u(\underline{x}), \underline{\nabla} u(\underline{x})\right)$ représentent respectivement la matrice hessienne de u (i.e $(\underline{\underline{H}}_u(\underline{x}))_{ij} = \partial^2_{ij} u(\underline{x})$) et le gradient de u (i.e $(\underline{\nabla} u(\underline{x}))_i = \partial_i u(\underline{x})$). Les coefficients des termes d'ordre deux sont représentés par la matrice $\underline{\underline{A}} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ symétrique (donc diagonalisable), ceux d'ordre un par le vecteur $\underline{B} \in \mathbb{R}^N$ et ceux d'ordre zéro par c. L'équation différentielle (1) est une EDP linéaire d'ordre au plus deux portée par la variable u et soumise au terme source $x \mapsto f(x)$.

EDP linéaire du 2nd ordre

Equation de Poisson : $\Delta u(\underline{x}) = f(x) \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Dans ce cas il n'y a pas de dépendance temporelle ($\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$) ni dérivées spatiales croisées, donc on a:

$$\underline{\underline{A}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \underline{B}(\underline{x}) = \underline{0} \qquad ; \qquad c(\underline{x}) = 0$$

Equation de propagation d'ondes à célérité constante $\mathcal{C}$:

$$\Delta u(\underline{x}) - \frac{1}{\mathcal{C}^2} \partial_1^2 u(\underline{x}) = f(\underline{x}) \qquad \forall t \geq 0, \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3$$

Dans ce cas il n'y a pas de dérivées croisées, donc

$$\underline{\underline{A}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mathcal{C}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \underline{B}(\underline{x}) = \underline{0} \, ; \, c(\underline{x}) = 0$$

EDP linéaire du 2nd ordre

Equation de diffusion avec $\underline{\underline{D}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie positive symétrique représentant les coefficients de diffusion variables en espace :

$$\mathrm{div}\left(\underline{\underline{D}}(\underline{x}).\underline{\nabla} u(\underline{x})\right) - \partial_1 u(\underline{x}) = f(\underline{x}) \qquad \forall t \geq 0, \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3$$

Le développement du premier terme s'écrit, en notations d'Einstein (pour $2 \leq i, j \leq 4$) :

$$\left(D_{ij} u_{,j}\right)_{,i} = D_{ij} u_{,ij} + (D_{ij})_{,i} u_{,j}$$

soit en écriture tensorielle :

$$\mathrm{div}\left(\underline{\underline{D}}(\underline{x}).\underline{\nabla} u(\underline{x})\right) = \underline{\underline{D}}(\underline{x}) : \underline{\underline{H}}_u(\underline{x}) + \underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{D}}(\underline{x})).\underline{\nabla} u(\underline{x})$$

On a alors :

$$\underline{\underline{A}}(\underline{x}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \underline{\underline{D}}(\underline{x}) & \\ 0 & & & \end{array}\right] \quad ; \quad \underline{B}(\underline{x}) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ \hline \underline{\mathrm{div}}\left(\underline{\underline{D}}(\underline{x})\right) \end{array}\right)$$

EDP linéaire du 2nd ordre

Classification

Soit $\underline{\underline{A}}$ la matrice des coefficients des termes du second ordre de l'EDP (1).

- Si $\underline{\underline{A}}$ n'admet que des valeurs propres non nulles et toutes de même signe, alors (1) est **elliptique**;
- Si $\underline{\underline{A}}$ n'admet que des valeurs propres non nulles et toutes de même signe sauf une de signe opposé, alors (1) est **hyperbolique**;
- Si $\underline{\underline{A}}$ admet $N-1$ valeurs propres non nulles de même signe et une valeur propre nulle, et si de plus le noyau de $\underline{\underline{A}}$ vérifie

$$\underline{\ker}(\underline{\underline{A}}(\underline{x})).\underline{B}(\underline{x}) \neq 0 \tag{2}$$

alors (1) est **parabolique**.

Sommaire : Solutions fondamentales

Historique

Solutions fondamentales (ou élémentaires)

- Introduites par Georges Green (1828) pour électromagnétisme (lien vers le texte)

Historique

Solutions fondamentales (ou élémentaires)

- Introduites par Georges Green (1828) pour électromagnétisme (lien vers le texte)
- Appellation "Fonction de Green" par Bernhard Riemann en 1869

Historique

Solutions fondamentales (ou élémentaires)

- Introduites par Georges Green (1828) pour électromagnétisme (lien vers le texte)
- Appellation "Fonction de Green" par Bernhard Riemann en 1869
- Carl Neumann (1877) : théorie du potentiel Newtonien en 2D

Historique

Solutions fondamentales (ou élémentaires)

- Introduites par Georges Green (1828) pour électromagnétisme (lien vers le texte)
- Appellation "Fonction de Green" par Bernhard Riemann en 1869
- Carl Neumann (1877) : théorie du potentiel Newtonien en 2D
- Gustav Kirchhoff : propagation d'ondes 3D

Historique

Solutions fondamentales (ou élémentaires)

- Introduites par Georges Green (1828) pour électromagnétisme (lien vers le texte)
- Appellation "Fonction de Green" par Bernhard Riemann en 1869
- Carl Neumann (1877) : théorie du potentiel Newtonien en 2D
- Gustav Kirchhoff : propagation d'ondes 3D
- Hermann von Helmholtz : acoustique

Historique

Solutions fondamentales (ou élémentaires)

- Introduites par Georges Green (1828) pour électromagnétisme (lien vers le texte)
- Appellation "Fonction de Green" par Bernhard Riemann en 1869
- Carl Neumann (1877) : théorie du potentiel Newtonien en 2D
- Gustav Kirchhoff : propagation d'ondes 3D
- Hermann von Helmholtz : acoustique
- Richard Feynman (1948) : théorie quantique des champs

Sommaire : Solutions fondamentales

Introduction

Solution fondamentale

Soit $\mathcal{L}_x$ un opérateur différentiel quelconque. On considère l'équation

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathcal{L}_x\left[w\right]\left(\underline{x}\right) = \mathcal{S}(\underline{x})$$

une distribution $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_e(\underline{x}, \underline{y})$ satisfaisant $\mathcal{L}_x[\mathcal{E}_e](\underline{x}, \underline{y}) = \delta(\underline{x} - \underline{y})$ est appelée solution fondamentale de l'opérateur $\mathcal{L}_x$. $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ est un paramètre libre.

Remarque : $\mathcal{E}_e$ n'est pas unique : $\exists w_0$ solution de l'équation homogène $\mathcal{L}_x[w_0] = 0$

Sommaire : Solutions fondamentales

Solution avec source

Si $\mathcal{S}$ second membre (terme source), alors la solution s'écrit:

$$w(\underline{x}) = \mathcal{E}_e \star \mathcal{S}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{S}(\underline{y})\mathcal{E}_e(\underline{x}, \underline{y})dV_y$$

On suppose que $\mathcal{S}$ est continue et à décroissance suffisamment rapide quand $\|\underline{x}\| \to \infty$ afin d'assurer la convergence de l'intégrale et l'existence des dérivées spatiales de $\mathcal{L}_x$

EDP linéaires à coefficients constants

Dans ce cas il est classique de poser $\underline{y} = \underline{0}$ et de chercher $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_e(\underline{x})$. La solution particulière s'écrit alors :

$$w(\underline{x}) = \mathcal{E}_e \star \mathcal{S}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{S}(\underline{y})\mathcal{E}_e(\underline{x} - \underline{y})dV_y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{S}(\underline{x} - \underline{y})\mathcal{E}_e(\underline{y})dV_y$$

Sommaire : Solutions d'un problème de Cauchy

Sommaire : Solutions d'un problème de Cauchy

Représentation d'une solution fondamentale d'un opérateur différentiel ordinaire

Soit l'EDO

$$\mathcal{L}[w](t) = \sum_{k=0}^{m} a_k(t) w^{(k)}(t) = f(t) \tag{3}$$

La solution fondamentale $\mathcal{E}_e$ vérifiant $\mathcal{L}[\mathcal{E}_e] = \delta_0$ est donnée par la distibution:

$$\boxed{\mathcal{E}_e = Z T_{H_0}} \tag{4}$$

où T_{H_0} est la distribution de Heavyside, et $t \mapsto Z(t)$ solution du problème homogène

$$\begin{cases} \mathcal{L}[Z](t) = 0 \\ \forall i \in [\![0; m-2]\!],\ Z^{(i)}(0) = 0 \\ Z^{(m-1)}(0) = \dfrac{1}{a_m(0)} \end{cases} \tag{5}$$

Problème de Cauchy pour les EDO

Soit le problème de Cauchy à coefficients a_k constants:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[w](t) = \sum_{k=0}^{m} a_k w^{(k)}(t) = f(t) & \forall t > 0 \\ w^{(k)}(0) = b_k & \forall k \in [\![0; m-1]\!] \end{cases} \tag{6}$$

Soit w solution sur $\mathbb{R}^+$. On étend (w, f) par zéro sur $\mathbb{R}^-$ et on note (w_+, f_+) les fonctions telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ w_+(t) = H_0(t)w(t) \quad ; \quad f_+(t) = H_0(t)f(t)$$

Par dérivations successives :

$$\begin{aligned} w'_+(t) &= \delta_0 w(t) + T_{H_0} w'(t) = b_0\delta_0 + T_{H_0} w'(t) \\ w''_+(t) &= b_0\delta'_0 + b_1\delta_0 + T_{H_0} w''(t) \\ w^{(k)}_+(t) &= \sum_{j=0}^{k-1} b_j \delta_0^{(k-j-1)} + T_{H_0} w^{(k)}(t) \end{aligned}$$

Problème de Cauchy pour les EDO

Soit le problème de Cauchy à coefficients a_k constants:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[w](t) = \sum_{k=0}^{m} a_k w^{(k)}(t) = f(t) & \forall t > 0 \\ w^{(k)}(0) = b_k & \forall k \in [\![0; m-1]\!] \end{cases} \tag{6}$$

Soit w solution sur $\mathbb{R}^+$. On étend (w, f) par zéro sur $\mathbb{R}^-$ et on note (w_+, f_+) les fonctions telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ w_+(t) = H_0(t)w(t) \quad ; \quad f_+(t) = H_0(t)f(t)$$

Par conséquent:

$$\mathcal{L}[w_+] = T_{H_0}\mathcal{L}[w] + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta_0^{(k)} \quad \text{avec } c_k = \sum_{j=0}^{m-k-1} a_{k+j+1} b_j$$

$$= f_+(t) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta_0^{(k)}$$

Solution du problème de Cauchy généralisé

Soient Z la solution du problème homogène (5) et $\mathcal{E}_e$ la solution fondamentale pour L. Alors la solution

$$w_+(t) = \mathcal{E}_e \star \left(f_+ + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta_0^{(k)} \right) = T_{H_0} Z \star f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \mathcal{E}_e^{(k)}$$

Or $\forall k \in [\![0; m-1]\!]$, $\mathcal{E}_e^{(k)} = T_{H_0} Z^{(k)}$, voir (4). D'où

$$\boxed{w_+(t) = T_{H_0} \left[Z \star f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k Z^{(k)} \right]}$$

Sommaire : Solutions d'un problème de Cauchy

Soit le problème parabolique:

$$\begin{cases} \partial_t w(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_x[w](t,\underline{x}) = S(t,\underline{x}) & \forall t > 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ w(0,\underline{x}) = f(\underline{x}) \end{cases} \tag{7}$$

Soit $\mathcal{E}$ la solution fondamentale de (7) vérifiant:

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E}(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_x[\mathcal{E}](t,\underline{x}) = 0 & \forall t > \tau \geq 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = \delta(\underline{x}-\underline{\xi}) & t = \tau \end{cases} \tag{8}$$

Remarque :

- Si les coefficients de $\mathcal{L}_x$ sont indépendants de t, alors $\mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = \mathcal{E}(t-\tau,\underline{x};\underline{\xi})$

Soit le problème parabolique:

$$\begin{cases} \partial_t w(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_x[w](t,\underline{x}) = S(t,\underline{x}) & \forall t > 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ w(0,\underline{x}) = f(\underline{x}) \end{cases} \tag{7}$$

Soit $\mathcal{E}$ la solution fondamentale de (7) vérifiant:

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E}(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_x[\mathcal{E}](t,\underline{x}) = 0 & \forall t > \tau \geq 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = \delta(\underline{x} - \underline{\xi}) & t = \tau \end{cases} \tag{8}$$

Remarque :

- Si les coefficients de $\mathcal{L}_x$ sont indépendants de t, alors $\mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = \mathcal{E}(t-\tau,\underline{x};\underline{\xi})$
- Soit $\mathcal{E}_e$ solution de l'opérateur $\partial_t - \mathcal{L}_x$:

$$\partial_t \mathcal{E}_e(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_x[\mathcal{E}_e](t,\underline{x}) = \delta(t-\tau)\delta(\underline{x}-\underline{\xi})$$

Alors $\mathcal{E}_e(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = H_0(t-\tau)\mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi})$.

La solution de (7) s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} w(t,\underline{x}) &= \mathcal{E}_e \star \mathcal{S}(t,\underline{x}) + \mathcal{E}_e|_{\tau=0} \star f(\underline{x}) \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_e(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi})\mathcal{S}(\tau,\underline{\xi})\,d\tau d\underline{\xi} + \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_e(t,\underline{x};0,\underline{\xi})f(\underline{\xi})\,d\underline{\xi} \end{aligned}}$$

Remarque : Si tous les coefficients de $\mathcal{L}_x$ sont constants, alors $\mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = \mathcal{E}(t-\tau,\underline{x}-\underline{\xi})$ et

$$\begin{aligned} w(t,\underline{x}) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} & \mathcal{E}_e(t-\tau,\underline{x}-\underline{\xi})\mathcal{S}(\tau,\underline{\xi})\,d\tau d\underline{\xi} \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_e(t,\underline{x}-\underline{\xi})f(\underline{\xi})\,d\underline{\xi} \end{aligned}$$

Equation de la chaleur

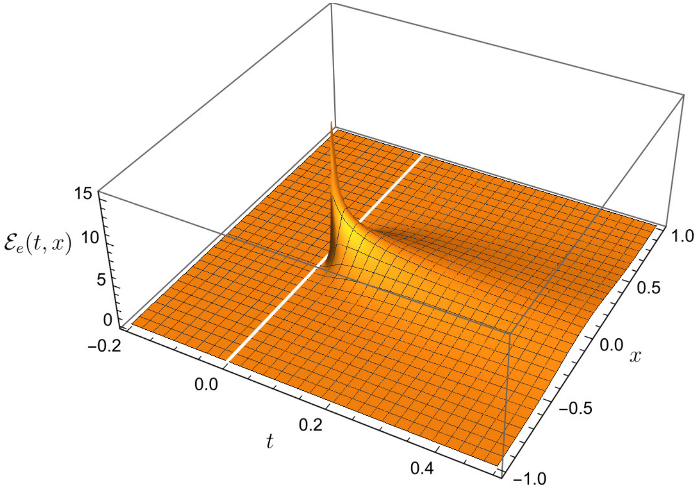
Résoudre le problème dans $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) - a\partial_x^2 w(t,x) = S(t,x) & t > 0 \\ w(0,x) = f(x) \end{cases}$$

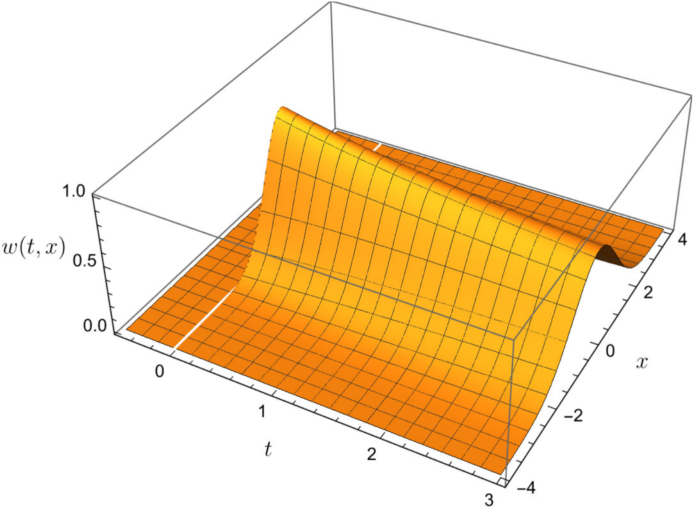
Avec $f(x) = f_0 e^{-x^2}$; $S(t,x) = S_0 \delta(x - x_0)\delta(t - t_0)$.

Equation de la chaleur ($a = 0.1 m^2/s$)

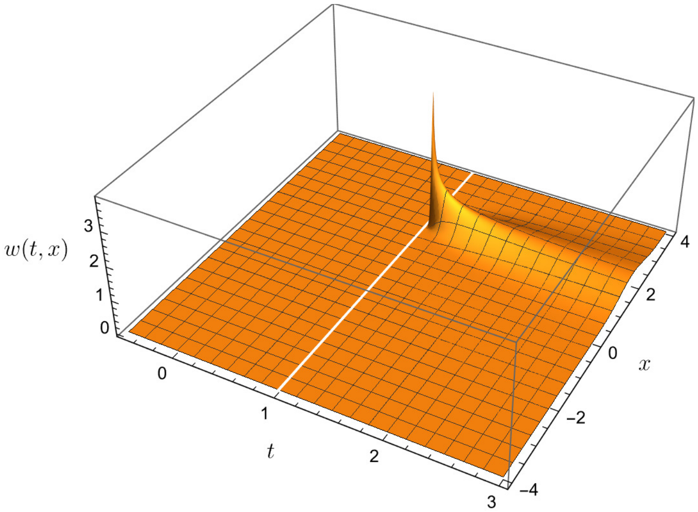
L'équation fondamentale est : $\mathcal{E}_e(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} e^{-\frac{x^2}{4at}} H_0(t)$



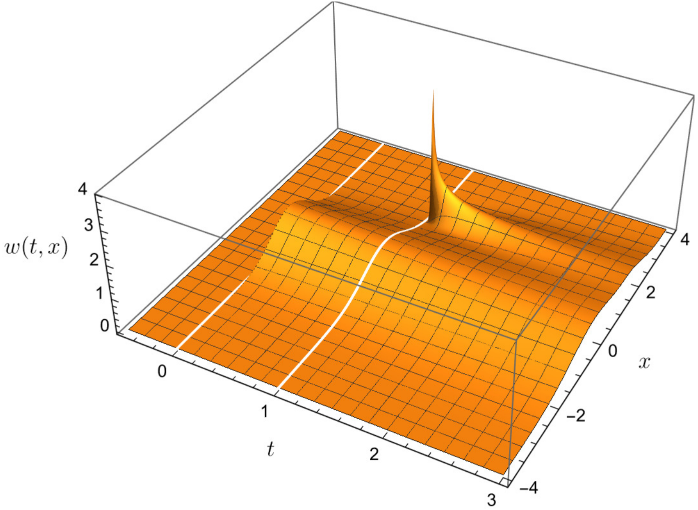
Equation de la chaleur ($a = 0.1 m^2/s$) : solution sous f ($f_0 = 1, S_0 = 0$)



Equation de la chaleur ($a = 0.1 m^2/s$): solution sous S ($f_0 = 0, S_0 = 0.5$) avec ($t_0 = 1s$, $x_0 = 2m$)



Equation de la chaleur ($a = 0.1 m^2/s$) : solution sous f et S ($f_0 = 1, S_0 = 0.1$) avec ($t_0 = 1s$, $x_0 = 2m$)



Propriété

Si $\mathcal{L}_x$ peut se décomposer comme une somme d'opérateur à une variable spatiale x_k

$$\mathcal{L}_x[w] = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_k[w] \quad \text{où } \mathcal{L}_k[w](t,\underline{x}) = a_k(t,x_k)\partial_k^2 w + b_k(t,x_k)\partial_k w + c_k w$$

Alors la solution fondamentale est de la forme

$$\mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k(t,x_k;\tau,\xi_k)$$

où

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E}_k - \mathcal{L}_k[\mathcal{E}_k] = 0 \\ \mathcal{E}_k|_{t=\tau} = \delta(x_k - \xi_k) \end{cases}$$

Dans ce cas on dit que le problème de Cauchy admet une séparation incomplète de variables (séparation en espace mais pas en temps).

Sommaire : Solutions d'un problème de Cauchy

Soit le problème hyperbolique:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t,\underline{x}) + \varphi(t,\underline{x})\partial_t w(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_x[w](t,\underline{x}) = S(t,\underline{x}) & \forall t > 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ w(0,\underline{x}) = f(\underline{x}) \\ \partial_t w(0,\underline{x}) = g(\underline{x}) \end{cases} \tag{9}$$

Soit $\mathcal{E}$ la solution fondamentale de (9) vérifiant:

$$\begin{cases} \partial_t^2 \mathcal{E}(t,\underline{x}) + \varphi(t,\underline{x})\partial_t \mathcal{E}(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_x[\mathcal{E}](t,\underline{x}) = 0 & \forall t > \tau \geq 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = 0 & t = \tau \\ \partial_t \mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = \delta(\underline{x}-\underline{\xi}) & t = \tau \end{cases}$$

Remarque : Si les coefficients de $\mathcal{L}_x$ sont indépendants de t, alors $\mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = \mathcal{E}(t-\tau,\underline{x};\underline{\xi})$

Soit le problème hyperbolique:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t,\underline{x}) + \varphi(t,\underline{x})\partial_t w(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_x[w](t,\underline{x}) = S(t,\underline{x}) & \forall t > 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ w(0,\underline{x}) = f(\underline{x}) \\ \partial_t w(0,\underline{x}) = g(\underline{x}) \end{cases} \tag{9}$$

Soit $\mathcal{E}$ la solution fondamentale de (9) vérifiant:

$$\begin{cases} \partial_t^2 \mathcal{E}(t,\underline{x}) + \varphi(t,\underline{x})\partial_t \mathcal{E}(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_x[\mathcal{E}](t,\underline{x}) = 0 & \forall t > \tau \geq 0, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = 0 & t = \tau \\ \partial_t \mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = \delta(\underline{x}-\underline{\xi}) & t = \tau \end{cases}$$

Remarque : Soit $\mathcal{E}_e$ solution de :

$$\partial_t^2 \mathcal{E}_e(t,\underline{x}) + \varphi(t,\underline{x})\partial_t \mathcal{E}_e(t,\underline{x}) - \mathcal{L}_x[\mathcal{E}_e](t,\underline{x}) = \delta(t-\tau)\delta(\underline{x}-\underline{\xi})$$

Alors $\mathcal{E}_e(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = H_0(t-\tau)\mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi})$.

La solution de (9) s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} w(t,\underline{x}) = \mathcal{E}_e \star \mathcal{S}(t,\underline{x}) + \left\{ \mathcal{E}_e|_{\tau=0} \star (f\varphi + g) \right\}(t,\underline{x}) \\ - f \star \partial_\tau \mathcal{E}_e(t,\underline{x};0,\underline{\xi}) \end{aligned}}$$

Remarque : Si tous les coefficients de $\mathcal{L}_x$ sont constants, alors $\mathcal{E}(t,\underline{x};\tau,\underline{\xi}) = \mathcal{E}(t-\tau,\underline{x}-\underline{\xi})$.

Application

Soit le problème de propagation d'onde 1D dans un milieu homogène de célérité $c > 0$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t,x) - c^2 \partial_x^2 w(t,x) = S(t,x) \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \\ w(0,x) = f(x) \\ \partial_t w(0,x) = g(x) \end{cases} \tag{10}$$

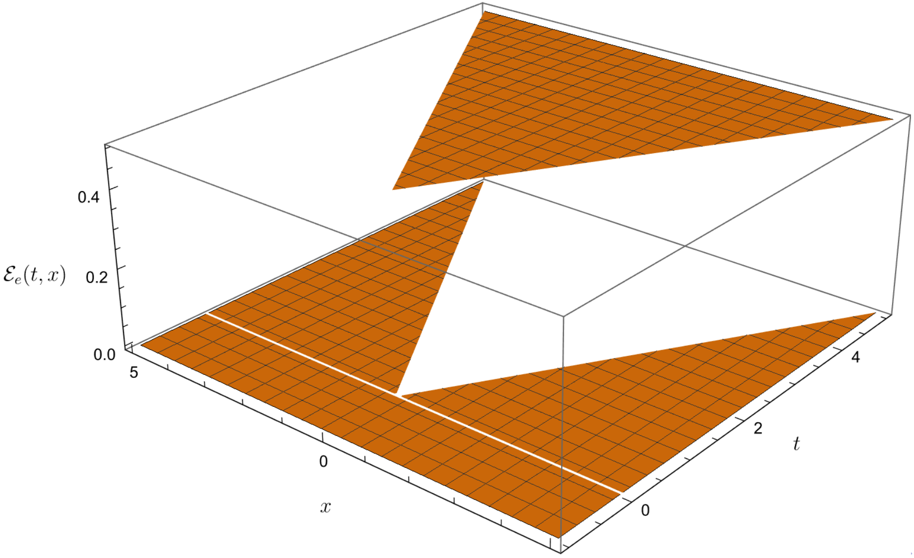
1. Déterminer la solution fondamentale $\mathcal{E}_e$ de cet opérateur.
2. Retrouver, via $\mathcal{E}_e$, la formule de d'Alembert 1D : $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$w(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi$$
$$+ \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} S(\tau,\xi)d\tau d\xi$$

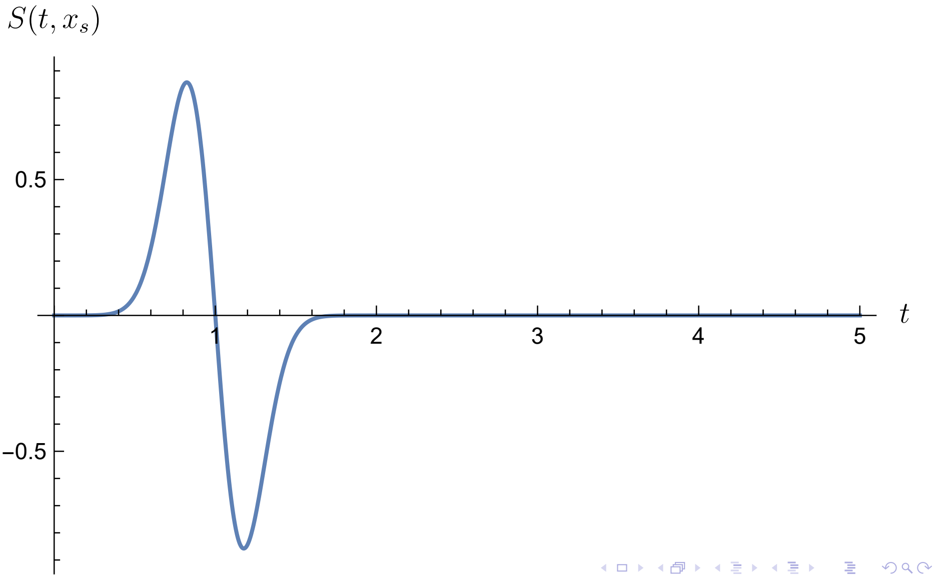
3. Résoudre (10) pour $f \equiv g \equiv 0$ et

$$S(t,x) = -2\sigma\,(t-t_0)\, e^{-\sigma^2(t-t_0)^2} H_0(t)\delta_0(x-x_s)$$

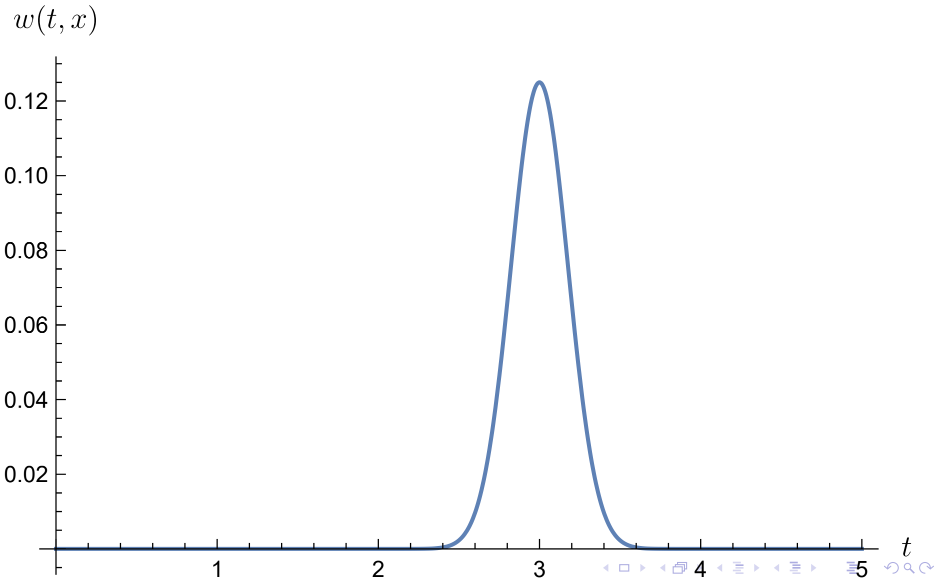
Illustrations de l'exercice ($c = 1m/s, \sigma = 4s^{-1}, t_0 = 1s, x_s = 0m$)



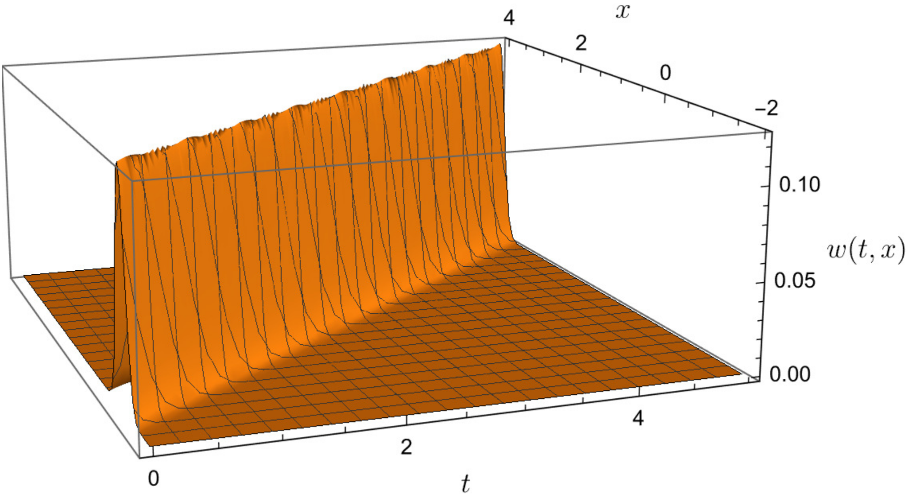
Illustrations de l'exercice $(c = 1m/s, \sigma = 4s^{-1}, t_0 = 1s, x_s = 0m)$



Illustrations de l'exercice ($c = 1m/s, \sigma = 4s^{-1}, t_0 = 1s, x_s = 0m$)



Illustrations de l'exercice $(c = 1m/s, \sigma = 4s^{-1}, t_0 = 1s, x_s = 0m)$



Principe des images : CL Dirichlet homogène

Soit $(\mathcal{P}_D)$ le problème de propagation 1D avec condition de Dirichlet homogène :

$$(\mathcal{P}_D)\begin{cases} \partial_t^2 w(t,x) - c^2\partial_x^2 w(t,x) = 0 \quad \forall t>0, x>0 \\ w(0,x) = f(x) \\ \partial_t w(0,x) = g(x) \\ w(t,0) = 0 \end{cases}$$

Remarque : L'opérateur d'Alembertien $\Box = \partial_t^2 - c^2\partial_x^2$ est paire = invariant par la transformation $x \mapsto -x$. Ainsi $\forall t > 0$,

- Si (f,g) sont des fonctions paires, alors $w(t,-x) = w(t,x)$
- Si (f,g) sont des fonctions impaires, alors $w(t,-x) = -w(t,x)$

Principe des images : CL Dirichlet homogène

On prolonge les conditions initiales par imparité:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ -f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x > 0 \\ -g(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Soit $\tilde{w}$ la solution du problème de Cauchy:

$$(\tilde{\mathcal{P}}_D) \begin{cases} \partial_t^2 \tilde{w}(t,x) - c^2 \partial_x^2 \tilde{w}(t,x) = 0 & \forall t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \tilde{w}(0,x) = \tilde{f}(x) \\ \partial_t \tilde{w}(0,x) = \tilde{g}(x) \end{cases}$$

Solution de $(\mathcal{P}_D)$= restriction dans $\mathbb{R}^+$ de la solution de $(\tilde{\mathcal{P}}_D)$.

Remarque : $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ étant impaires, alors $x \mapsto \tilde{w}(t,x)$ est impaire et en particulier $\tilde{w}(t,0) = 0$.

Principe des images

- $(\tilde{f}^+, \tilde{g}^+)$ source réelle, à support dans $\mathbb{R}^+$: $\tilde{f}^+(x) = H_0(x)\tilde{f}(x)$
- $(\tilde{f}^-, \tilde{g}^-)$ source image, à support dans $\mathbb{R}^-$: $\tilde{f}^-(x) = (1 - H_0(x))\tilde{f}(x)$
- $\tilde{f} = \tilde{f}^+ + \tilde{f}^-$
- Par linéarité, $\tilde{w}(t,x) = \tilde{w}^+(t,x) + \tilde{w}^-(t,x)$

où

- $\tilde{w}^+$ solution de $(\tilde{\mathcal{P}}_D^+)$: onde émise par la source réelle (comme si pas de bord) = onde incidente. $\tilde{w}^+ \neq H_0\tilde{w}$
- $\tilde{w}^-$ solution de $(\tilde{\mathcal{P}}_D^-)$: onde émise par la source image (créée par bord) = onde réfléchie

Solution de $(\tilde{\mathcal{P}}_D^+)$

Soit le problème de Cauchy:

$$(\tilde{\mathcal{P}}_D^+)\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{w}^+(t,x) - c^2 \partial_x^2 \tilde{w}^+(t,x) = 0 & \forall t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \tilde{w}^+(0,x) = \tilde{f}^+(x) \\ \partial_t \tilde{w}^+(0,x) = \tilde{g}^+(x) \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\tilde{w}^+(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\tilde{f}^+(x-ct) + \tilde{f}^+(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}^+(\xi)d\xi & \text{si } x > ct \\ \frac{1}{2}\left[0 + \tilde{f}^+(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{0}^{x+ct} \tilde{g}^+(\xi)d\xi & \text{si } |x| < ct \\ 0 & \text{si } x < -ct \end{cases}$$

Solution de $(\tilde{\mathcal{P}}_D^+)$

Soit le problème de Cauchy:

$$(\tilde{\mathcal{P}}_D^+) \begin{cases} \partial_t^2 \tilde{w}^+(t,x) - c^2 \partial_x^2 \tilde{w}^+(t,x) = 0 \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \tilde{w}^+(0,x) = \tilde{f}^+(x) \\ \partial_t \tilde{w}^+(0,x) = \tilde{g}^+(x) \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\tilde{w}^+(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi & \text{si } x > ct \\ \frac{1}{2}\left[0 + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{0}^{x+ct} g(\xi)d\xi & \text{si } |x| < ct \\ 0 & \text{si } x < -ct \end{cases}$$

Solution de $(\tilde{\mathcal{P}}_D^-)$

Soit le problème de Cauchy:

$$(\tilde{\mathcal{P}}_D^-)\begin{cases}\partial_t^2 \tilde{w}^-(t,x) - c^2\partial_x^2\tilde{w}^-(t,x) = 0 \quad \forall t>0, \in \mathbb{R}\\ \tilde{w}^-(0,x) = \tilde{f}^-(x)\\ \partial_t\tilde{w}^-(0,x) = \tilde{g}^-(x)\end{cases}$$

dont la solution est :

$$\tilde{w}^-(t,x) = \begin{cases}0 & \text{si } x > ct\\ \frac{1}{2}\left[\tilde{f}^-(x-ct) + 0\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0}\tilde{g}^-(\xi)d\xi & \text{si } |x| < ct\\ \frac{1}{2}\left[\tilde{f}^-(x-ct) + \tilde{f}^-(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\tilde{g}^-(\xi)d\xi & \text{si } x < -ct\end{cases}$$

Solution de $(\tilde{\mathcal{P}}_D^-)$

Soit le problème de Cauchy:

$$(\tilde{\mathcal{P}}_D^-)\begin{cases}\partial_t^2 \tilde{w}^-(t,x) - c^2\partial_x^2\tilde{w}^-(t,x) = 0 \quad \forall t>0, \in \mathbb{R}\\ \tilde{w}^-(0,x) = \tilde{f}^-(x)\\ \partial_t\tilde{w}^-(0,x) = \tilde{g}^-(x)\end{cases}$$

dont la solution est :

$$\tilde{w}^-(t,x) = \begin{cases}0 & \text{si } x > ct\\ \frac{1}{2}\left[-f(ct-x)+0\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{0} g(\xi)d\xi & \text{si } |x| < ct\\ \frac{1}{2}\left[-f(ct-x) - f(-x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{-x+ct}^{-x-ct} g(\xi)d\xi & \text{si } x < -ct\end{cases}$$

Solution de $(\mathcal{P}_D)$

Au final, par linéarité

$$\tilde{w}(t,x) = \tilde{w}^{-}(t,x) + \tilde{w}^{+}(t,x)$$

et $\forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}, w(t,x) = H_0(x)\tilde{w}(t,x)$ donc $\forall t \geq 0, x \geq 0,$

$$w(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi & \text{si } x > ct \\ \frac{1}{2}\left[-f(ct-x) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(\xi)d\xi & \text{si } 0 \leq x < ct \end{cases}$$

Illustration: $g(x) = 0\,;\; f(x) = e^{\frac{(x-x_0)^2}{0.1}}\;;\; x_0 = 2m$

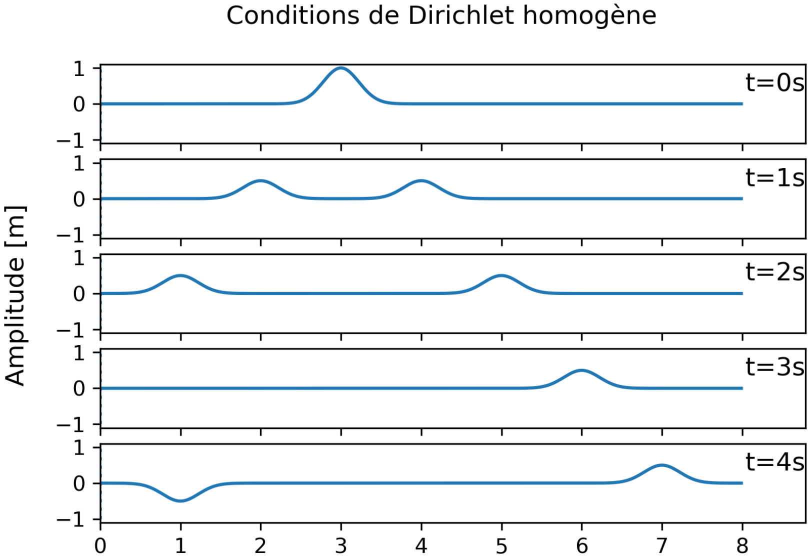
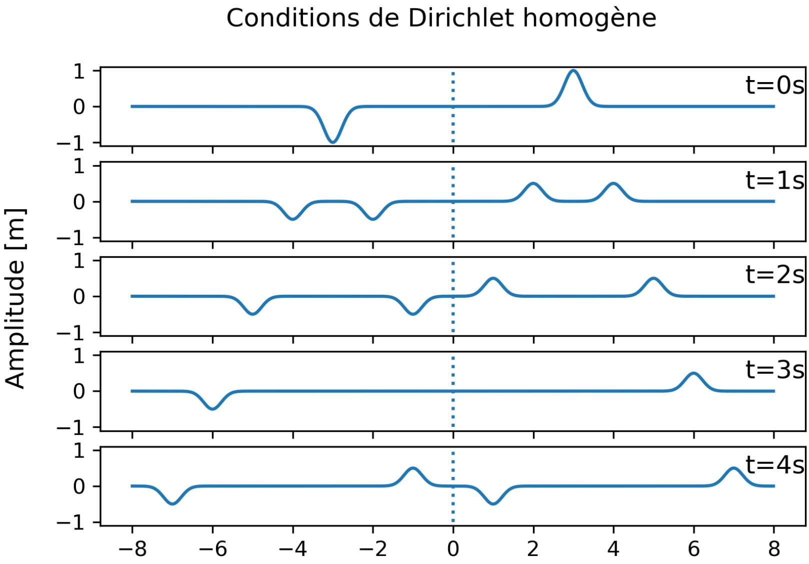


Illustration: $g(x) = 0\,;\; f(x) = e^{\frac{(x-x_0)^2}{0.1}}\,;\; x_0 = 2m$



Principe des images : CL Neumann homogène

Soit $(\mathcal{P}_N)$ le problème de propagation 1D avec condition de Neumann homogène :

$$(\mathcal{P}_N)\begin{cases}\partial_t^2 w(t,x) - c^2\partial_x^2 w(t,x) = 0 \quad \forall t>0, x>0\\ w(0,x) = f(x)\\ \partial_t w(0,x) = g(x)\\ \partial_x w(t,0) = 0\end{cases}$$

On prolonge les conditions initiales par **parité**:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x>0\\ f(-x) & \text{si } x<0\end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x>0\\ g(-x) & \text{si } x<0\end{cases}$$

Principe des images : CL Neumann homogène

Soit $\tilde{w}$ la solution du problème de Cauchy:

$$(\tilde{\mathcal{P}}_N) \begin{cases} \partial_t^2 \tilde{w}(t,x) - c^2 \partial_x^2 \tilde{w}(t,x) = 0 \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \tilde{w}(0,x) = \tilde{f}(x) \\ \partial_t \tilde{w}(0,x) = \tilde{g}(x) \end{cases}$$

Solution de $(\mathcal{P}_N)$= restriction dans $\mathbb{R}^+$ de la solution de $(\tilde{\mathcal{P}}_N)$.

Principe des images : CL Neumann homogène

Soit $\tilde{w}$ la solution du problème de Cauchy:

$$(\tilde{\mathcal{P}}_N)\begin{cases}\partial_t^2\tilde{w}(t,x) - c^2\partial_x^2\tilde{w}(t,x) = 0 \quad \forall t>0, x\in\mathbb{R}\\ \tilde{w}(0,x) = \tilde{f}(x)\\ \partial_t\tilde{w}(0,x) = \tilde{g}(x)\end{cases}$$

Solution de $(\mathcal{P}_N)$= restriction dans $\mathbb{R}^+$ de la solution de $(\tilde{\mathcal{P}}_N)$.

Remarque : $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ étant paires, alors $x \mapsto \tilde{w}(t,x)$ est paire.

$$\forall t \geq 0, x \geq 0,\; w(t,x) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi & \text{si } x > ct \\ \dfrac{1}{2}\left[f(ct-x)+f(x+ct)\right]+\dfrac{1}{2c}\left[\displaystyle\int_{0}^{x+ct} g(\xi)d\xi + \displaystyle\int_{0}^{ct-x} g(\xi)d\xi\right] & \text{si } 0 \leq x < ct \end{cases}$$

Illustration: $g(x) = 0\,;\ f(x) = e^{\frac{(x-x_0)^2}{0.1}}\ ;\ x_0 = 2m$

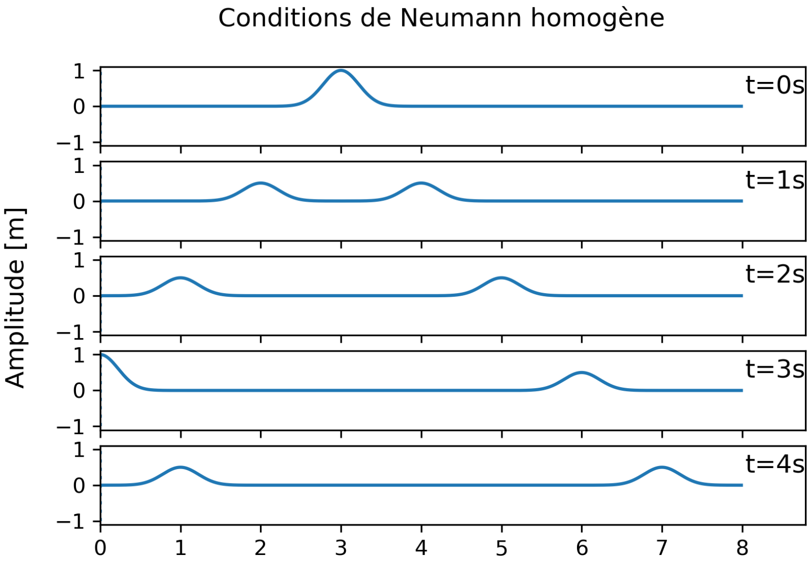


Illustration: $g(x) = 0\,;\ f(x) = e^{\frac{(x-x_0)^2}{0.1}}\ ;\ x_0 = 2m$