# EDP linéaire d'ordre un

Antoine RALLU

antoine.rallu@entpe.fr, bureau F005
https://arallu.perso.math.cnrs.fr/

Juin 2024

L'école de l'aménagement durable des territoires

# Sommaire : Introduction

# Introduction

On cherche $w : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant:

$$\underline{F}(\underline{x}).\underline{\nabla} w(\underline{x}) + g(\underline{x}) w(\underline{x}) = S(\underline{x})$$

- EDP linéaire d'ordre un
- Phénomènes de transport

Exemple: Equation de continuité en mécanique des fluides. Pour une vitesse connue $\underline{U} : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on cherche la densité $\rho(t, \underline{x})$ vérifiant

$$\partial_t \rho(t, \underline{x}) + \mathrm{div}\,(\rho(t, \underline{x}) \underline{U}(t, \underline{x})) = 0$$

# Introduction

Essais morphodynamiques à l'INRAE (JM Tanguy)

# Sommaire : EDP avec deux variables indépendantes

# Sommaire : EDP avec deux variables indépendantes

# Introduction

Soit l'EDP linéaire d'ordre un:

$$f(x,y)\partial_1 w(x,y) + g(x,y)\partial_2 w(x,y) = 0 \tag{1}$$

# Introduction

Soit l'EDP linéaire d'ordre un:

$$f(x,y)\partial_1 w(x,y) + g(x,y)\partial_2 w(x,y) = 0 \tag{1}$$

On introduit la transformation paramétrisée $w = \Phi(s)$ où $\Phi$ une fonction abitraire non constante qui conserve la forme de (1). Alors

$$\frac{dw(x,y)}{ds} = \partial_1 w(x,y) \times \frac{dx}{ds} + \partial_2 w(x,y) \times \frac{dy}{ds}$$

# Introduction

Soit l'EDP linéaire d'ordre un:

$$f(x,y)\partial_1 w(x,y) + g(x,y)\partial_2 w(x,y) = 0 \tag{1}$$

On introduit la transformation paramétrisée $w = \Phi(s)$ où $\Phi$ une fonction abitraire non constante qui conserve la forme de (1). Alors

$$\frac{dw(x,y)}{ds} = \partial_1 w(x,y) \times \frac{dx}{ds} + \partial_2 w(x,y) \times \frac{dy}{ds}$$

Par identification avec (1) on en déduit **l'équation caractéristique** :

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)} \tag{2}$$

# Introduction

Soit l'EDP linéaire d'ordre un:

$$f(x,y)\partial_1 w(x,y) + g(x,y)\partial_2 w(x,y) = 0 \tag{1}$$

On introduit la transformation paramétrisée $w = \Phi(s)$ où $\Phi$ une fonction abitraire non constante qui conserve la forme de (1). Alors

$$\frac{dw(x,y)}{ds} = \partial_1 w(x,y) \times \frac{dx}{ds} + \partial_2 w(x,y) \times \frac{dy}{ds}$$

Par identification avec (1) on en déduit **l'équation caractéristique** :

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)} \tag{2}$$

Les courbes intégrales de (2) sont appelées **caractéristiques** $\theta(x,y)$.

## Problème de Cauchy

Soit le problème avec condition initiale :

$$f(x,y)\partial_1 w(x,y) + g(x,y)\partial_2 w(x,y) = 0 \tag{3a}$$

$$w(x_0,y) = W(y) \tag{3b}$$

Dans ce cas $w(x_0,y) = \Phi\left(\theta(x_0,y)\right) = W(y)$ et fixe la fonction $\Phi$.

## Problème de Cauchy

Soit le problème avec condition initiale :

$$f(x,y)\partial_1 w(x,y) + g(x,y)\partial_2 w(x,y) = 0 \tag{3a}$$

$$w(x_0,y) = W(y) \tag{3b}$$

Dans ce cas $w(x_0,y) = \Phi\left(\theta(x_0,y)\right) = W(y)$ et fixe la fonction $\Phi$.

## Exemple

Soit l'équation de transport à vitesse constante $a \neq 0$

$$\begin{cases} \partial_1 w(x,y) + a\partial_2 w(x,y) = 0 \\ w(x_0,y) = y^k = W(y) \end{cases}$$

## Problème de Cauchy généralisé

$$f(x,y)\partial_1 w(x,y) + g(x,y)\partial_2 w(x,y) = 0 \tag{4a}$$

$$x = s_1(\xi)\,;\ y = s_2(\xi)\,;\ w = s_3(\xi) \tag{4b}$$

où $\xi$ est un paramètre borné, et $|s_1'| + |s_2'| \neq 0$

- Résoudre (4) revient à trouver la surface (4a) qui passe par (4b).
- La condition initiale (3b) peut être généralisée en (4b):

$$w(x_0, y) = W(y) \implies x = x_0\,;\ y = \xi\,;\ w = W(\xi)$$

- Dans l'énoncé du problème de Cauchy généralisé, $(x = s_1(\xi), y = s_2(\xi))$ est supposée n'être tangente à aucune caractéristique en tout point:

$$f(x,y)s_2' - g(x,y)s_1' \neq 0$$

## Problème de Cauchy généralisé

$$f(x,y)\partial_1 w(x,y) + g(x,y)\partial_2 w(x,y) = 0 \tag{4a}$$

$$x = s_1(\xi)\,;\; y = s_2(\xi)\,;\; w = s_3(\xi) \tag{4b}$$

où $\xi$ est un paramètre borné, et $|s_1'| + |s_2'| \neq 0$

- Résoudre (4) revient à trouver la surface (4a) qui passe par (4b).
- La condition initiale (3b) peut être généralisée en (4b):

$$w(x_0, y) = W(y) \implies x = x_0\,;\; y = \xi\,;\; w = W(\xi)$$

- Si $(x = s_1(\xi), y = s_2(\xi))$ est une caractéristique, alors
  - Si $s_3(\xi) = cst$, (4) n'a pas de solution
  - Si $s_3(\xi) \neq cst$, (4) a une infinité de solutions

# Morphodynamique d'une dune de sable dans un canal d'eau

Soit un canal rectangulaire et plat de dimensions : $12m \times 1m$. Le débit d'eau est de 400 l/s. Initialement la dune a la forme suivante:

$$\begin{cases} Z_f = 0.3 + 0.1\sin^2\left(\dfrac{\pi(x-2)}{8}\right) & \text{for} \quad x \in [2, 10] \\ Z_f = 0.3 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Le problème de Cauchy est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \dfrac{\partial Z_f(x,t)}{\partial t} + C_f(Z_f)\dfrac{\partial Z_f(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \forall t > t_0 \\ Z_f(x, t = t_0) = z_0(x) \end{cases}$$

Dans le cas des eaux profondes, ($C_f = cst = 1.5$ m/h), sinon ($C_f(Z_f)$).

# Morphodynamique d'une dune de sable dans un canal d'eau

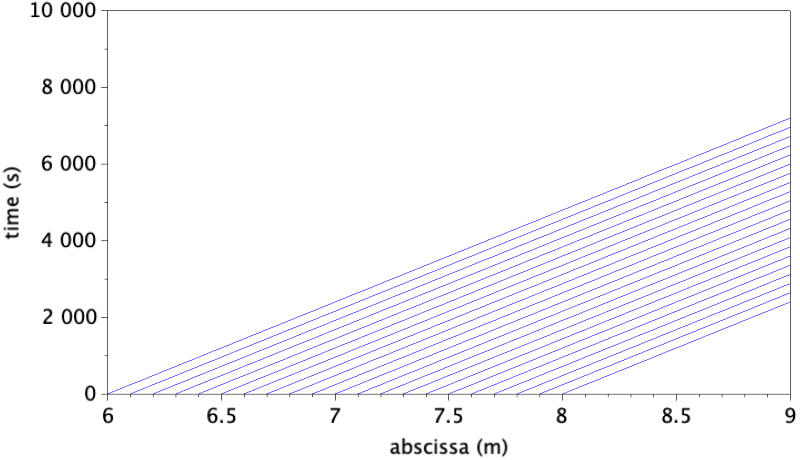


Figure: Linear characteristics

# Morphodynamique d'une dune de sable dans un canal d'eau

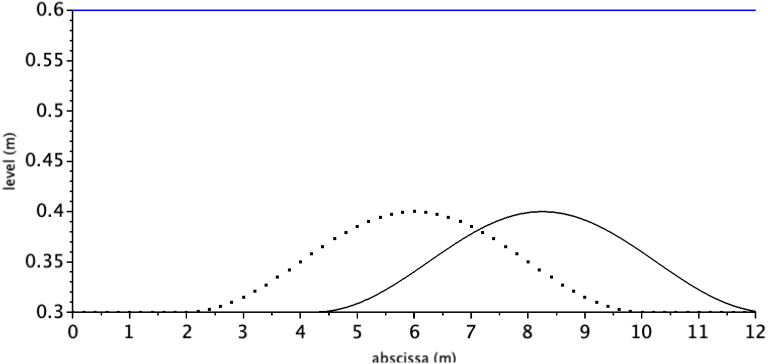


Figure: Initial (dot points), after 1.5 h (solid line)

# Morphodynamique d'une dune de sable dans un canal d'eau

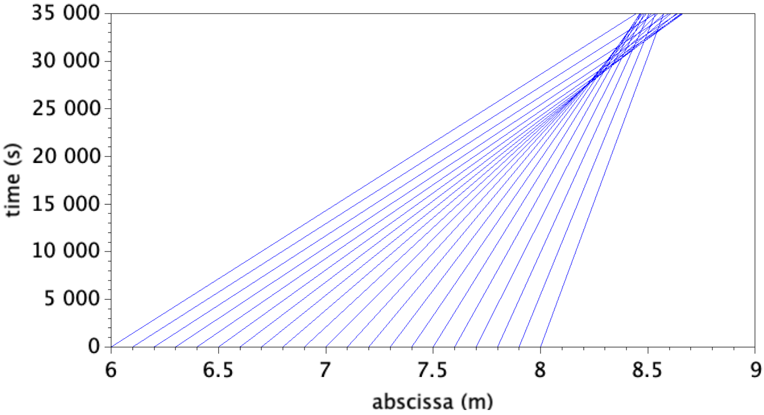


Figure: Non-Linear characteristics

# Morphodynamique d'une dune de sable dans un canal d'eau

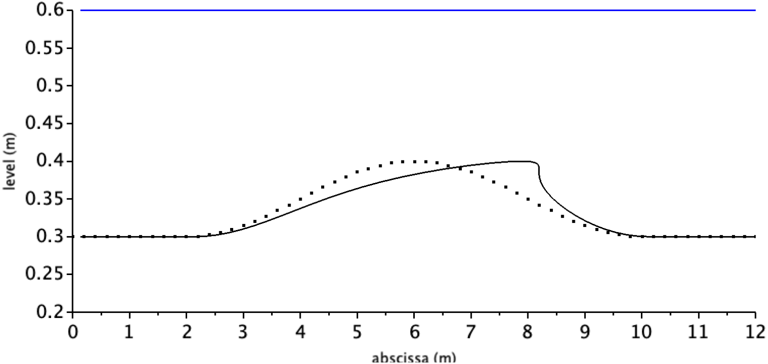


Figure: Initial (dot points), after 1.5 h (solid line)

# Sommaire : EDP avec deux variables indépendantes

# Problème hétérogène

Soit le problème

$$f(x,y)\partial_1 w(x,y) + g(x,y)\partial_2 w(x,y) = h_1(x,y)w(x,y) + h_0(x,y) \quad (5)$$

La solution générale s'écrit:

$$w(x,y) = w_2(x,y) + w_1(x,y) + \Phi(w_0(x,y))$$

où

- $w_0$ solution du problème homogène ($h_0 \equiv h_1 \equiv 0$)
- $w_1$ solution particulière de (5) avec $h_0 \equiv 0$
- $w_2$ solution particulière de (5)
- $\Phi$ fonction arbitraire

# Problème hétérogène

## Résolution par les caractéristiques

Soient deux courbes intégrales indépendantes
$u_1(x, y, w) = C_1$ ; $u_2(x, y, w) = C_2$ du système caractéristique

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{g(x, y)} = \frac{dw}{h_0(x, y) + h_1(x, y)w}$$

La solution générale de (5) s'écrit alors $\Phi(u_1, u_2) = 0$ ou alors
$u_k = \Psi(u_{3-k}), k = \{1, 2\}$

# Problème hétérogène

## Problème de Cauchy généralisé

Soit l'EDP (5) à laquelle on associe les CI généralisées $x = s_1(\xi)$ ; $y = s_2(\xi)$ ; $w = s_3(\xi)$. La méthode est :

1. Déterminer le système caractéristique et ses intégrales
2. Y substituer les données initiales

$$\begin{cases} u_1(s_1(\xi), s_2(\xi), s_3(\xi)) = C_1 \\ u_2(s_1(\xi), s_2(\xi), s_3(\xi)) = C_2 \end{cases}$$

3. Substituer $(C_1, C_2)$ dans les courbes intégrales:

$$\begin{cases} u_1(x, y, w) = u_1(s_1(\xi), s_2(\xi), s_3(\xi)) \\ u_2(x, y, w) = u_2(s_1(\xi), s_2(\xi), s_3(\xi)) \end{cases}$$

4. Elimination de $\xi$ pour trouver la forme explicite de $w(x, y)$

# Sommaire : Généralisation à $N$ variables

# Sommaire : Généralisation à $N$ variables

# Equation homogène

Soit l'EDP homogène :

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(\underline{x})\partial_i w(\underline{x}) = 0 \qquad \text{où } \underline{x} = x_1, \ldots, x_N$$

On définit les courbes intégrales fonctionnellement indépendantes

$$\forall i \in [\![1; N-1]\!],\ u_i(\underline{x}) = C_i$$

du système caractéristique

$$\frac{dx_1}{f_1(\underline{x})} = \ldots = \frac{dx_N}{f_N(\underline{x})}$$

Alors pour toute fonction $\Phi \not\equiv const$

$$w(\underline{x}) = \Phi(u_1, \ldots, u_{N-1})$$

# Avec second membre

Soit l'EDP avec second membre:

$$\sum_{i=1^N} f_i(\underline{x})\partial_i w(\underline{x}) = g(\underline{x})w(\underline{x}) + h(\underline{x})$$

On définit les courbes intégrales fonctionnellement indépendantes

$$\forall i \in [\![1; N]\!],\ u_i(\underline{x}, w) = C_i$$

du système caractéristique

$$\frac{dx_1}{f_1(\underline{x})} = \ldots = \frac{dx_N}{f_N(\underline{x})} = \frac{dw}{g(\underline{x})w(\underline{x}) + h(\underline{x})}$$

Alors $\Phi(u_1, \ldots, u_N) = 0$

# Sommaire : Généralisation à $N$ variables

Trouver $w$ solution de

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} f_i(\underline{x})\partial_i w(\underline{x}) = g(\underline{x})w(\underline{x}) + h(\underline{x}) \\ \forall i \in [\![1; N]\!],\ x_i = \varphi_i(\underline{\xi}) \qquad \text{où } \underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) \\ w = \varphi_{N+1}(\underline{\xi}) \end{cases}$$

On détermine les courbes intégrales

$$\forall k \in [\![1; N]\!],\ u_k\left(\varphi_1(\underline{\xi}), \ldots, \varphi_{N+1}(\underline{\xi})\right) = C_k$$

Par substitution des $(C_k)$ dans les courbes intégrales on trouve:

$$\forall k \in [\![1; N]\!],\ u_k(\underline{x}, w) = u_k\left(\varphi_1(\underline{\xi}), \ldots, \varphi_{N+1}(\underline{\xi})\right)$$

# Exercice

Résoudre le problème piloté par $(x, y, z) \mapsto w(x, y, z)$, où $(a, b, k) \neq 0$ :

$$\begin{cases} \partial_1 w + ax\partial_2 w + by\partial_3 w = 0 \\ x = 0\,;\ y = \xi_1\,;\ z = \xi_2\,;\ w = k\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) \end{cases}$$

# Exercice

L'équation caractéristique s'écrit:

$$ds = \frac{dx}{1} = \frac{dy}{ax} = \frac{dz}{by}$$

Le système à résoudre set donc

$$\begin{cases} x'(s) = 1 \\ y'(s) = ax(s) \\ z'(s) = by(s) \end{cases} \implies \begin{cases} x(s) = s + x_0 \\ y(s) = \dfrac{a}{2}s^2 + ax_0 s + y_0 \\ z(s) = \dfrac{ab}{6}s^3 + \dfrac{ab}{2}x_0 s^2 + y_0 bs + z_0 \end{cases}$$

donc

$$y = \frac{a}{2}(x^2 - x_0^2) + y_0\,;\, z = -\frac{ab}{3}x^3 + bxy + bx_0(\frac{a}{2}x_0^2 - y_0) + z_0 - \frac{ab}{6}x_0^3$$

# Exercice

$\exists(C_1, C_2) \in \mathbb{R}$ tels que :

$$y - \frac{a}{2}x^2 = C_1 \; ; \; z + \frac{ab}{3}x^3 - bxy = C_2$$

Par conséquent $\exists\Phi$ une fonction arbitraire telle que $w$ s'écrit :

$$w(x, y, z) = \Phi(y - \frac{a}{2}x^2, z + \frac{ab}{3}x^3 - bxy)$$

En appliquant les conditions initiales :

$$w(0, \xi_1, \xi_2) = \Phi(\xi_1, \xi_2) = k\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)$$

Au final la solution est :

$$w(x, y, z) = k\left[\left(y - \frac{a}{2}x^2\right)^2 + \left(z + \frac{ab}{3}x^3 - bxy)\right)^2\right]$$

# Sommaire : Généralisation à $N$ variables

## Condition suffisante

Soit $f_1 \equiv 1$, et $f_2, \ldots, f_N, g, h, \varphi_i$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1(V)$ dans un domaine $V$ défini par $V = \{0 < x_1 < X, x_i \in \mathbb{R}, i \geq 2\}$ tels que:

$$\exists K > 0/ \qquad \sqrt{\sum_{i=2}^{N} f_i^2(\underline{x})} \leq K \left(1 + \sqrt{\sum_{i=2}^{N} x_i^2}\right)$$

Alors de le problème de Cauchy admet une unique solution.