

# Introduction au traitement de signal

## Extraction des caractéristiques modales de structures

Antoine Rallu (ENTPE/LTDS)  
antoine.rallu@entpe.fr

Cours de Génie Parasismique



## Sommaire : Introduction

### Introduction

Introduction

Objectifs

Types de signaux

Analyse de signaux déterministes

Analyse de signaux aléatoires stationnaires

Réponse d'une structure à une sollicitation

Acquisition de signaux

FDD en pratique

Conclusion

## Signal

**Définition** mesure d'une grandeur physique

**Exemples** acoustique, sismique, électrocardiogramme, ...

**Signal analogique** signal continu dans le temps

## Exemples de traitement de signal

**Elaboration de signaux** synthèse, modulation, codage

**Modifications de signal** Amplification/Réduction de bruit, filtrage fréquentiel ou temporel, ...

**Interprétation de signaux** extraction/détection d'informations, identification, ...

## Objectifs du cours

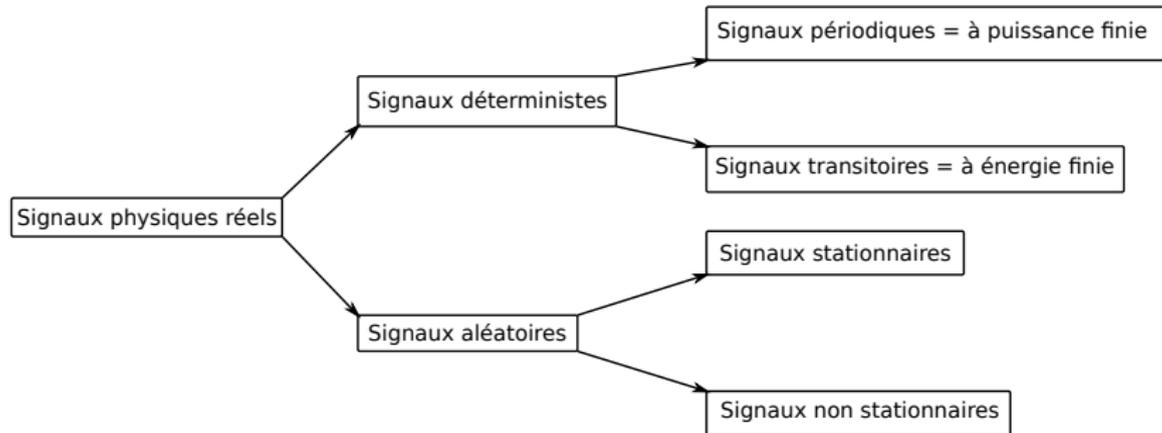
### Typologie de signaux

**Traitement de signal** Représentation temporelle/fréquentielle de signaux

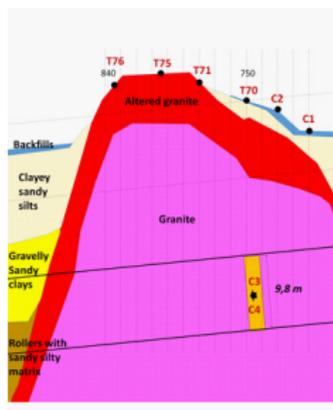
**FDD** Extraire caractéristiques modales

**Acquisition** Méthodologie enregistrement signaux sismiques

**Pédagogie** Lien cours analyse, calcul scientifique, acoustique. . .



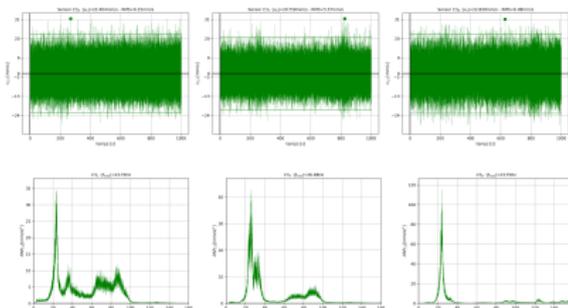
# Représentation temporelle/fréquentielle



X

Y

Z

 $\mathcal{F}$ 

 $\mathcal{F}^{-1}$

# Sommaire : Analyse de signaux déterministes

Introduction

**Analyse de signaux déterministes**

Analyse de signaux aléatoires stationnaires

Réponse d'une structure à une sollicitation

Acquisition de signaux

FDD en pratique

Conclusion

## Espaces fonctionnels

### Intégrabilité au sens d'une mesure

Soit  $X \subset \mathbb{R}$  un ensemble réel. Une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite intégrable sur  $X$  au sens d'une mesure  $\mu$  si et seulement si (i)  $f$  est mesurable sur  $X$  selon la mesure  $\mu$ , et (ii)

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

### Espace $\mathcal{L}^p(X), L^p(X)$ ,

Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $X \subset \mathbb{R}$  un ensemble. On définit les espaces fonctionnels :

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} / |f|^p \text{ intégrable au sens de la mesure } \mu \text{ sur } X\}$$

$$L^p(X, \mu) = \{\text{ensemble des classes d'équivalence de fonctions de } \mathcal{L}^p(X, \mu) \text{ presque partout égales.}\}$$

$L^p(X, \mu)$  sont des espaces de Banach (espace vectoriel normé complet) : en particulier les applications  $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu\right)^{1/p}$  sont des normes. En pratique, sauf mention contraire,  $\mu$  désigne la mesure de Lebesgue.

## Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

### Transformée directe et inverse

Soit  $x \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors sa transformée de Fourier, notée  $\mathcal{F}(x)$ , vaut :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(x)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

et sa transformée de Fourier inverse, notée  $\mathcal{F}^{-1}(x)$  :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \mathcal{F}^{-1}(x)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{+i2\pi\nu t} dt = \mathcal{F}(x)(-\nu)$$

### Inversion de la TF

Si  $x \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\mathcal{F}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}(x)(t) = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(x)(t) = x(t) \mu_{pp} t \in \mathbb{R}$$

## Remarques

### Relation d'incertitude

L'opération de transformée de Fourier inverse montre que pour décrire le signal  $t \mapsto x(t)$  à un instant donné à partir de sa représentation spectrale  $\nu \mapsto \mathcal{F}(x)(\nu)$ , il est nécessaire de parcourir l'ensemble des fréquences  $\nu \in \mathbb{R}$  (bande passante infinie). Il en est de même s'il on veut décrire le spectre en une fréquence donnée à partir du signal temporel (durée infinie). Ces deux observations ne sont pas réalisables en pratique, et apporteront des approximations dans l'estimation des grandeurs calculées.

### Fréquences négatives : quelle signification ?

Lors d'une mesure physique,  $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$  donc

$$\mathcal{F}(x)(\nu) = \operatorname{Re}(\mathcal{F}(x)(\nu)) + i \operatorname{Im}(\mathcal{F}(x)(\nu)) \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\mathcal{F}(x)(-\nu)) = \operatorname{Re}(\mathcal{F}(x)(\nu)) & \text{parité} \\ \operatorname{Im}(\mathcal{F}(x)(-\nu)) = -\operatorname{Im}(\mathcal{F}(x)(\nu)) & \text{imparité} \end{cases} \Rightarrow \text{Symétrie hermitique}$$

Donc il suffit de calculer la TF pour des  $\nu \geq 0$  pour accéder à toutes les fréquences.

## Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

### Définition

Soient  $(x, y) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ . Alors leur produit de convolution, noté  $x \star y$ , est défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x \star y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t - \tau)y(\tau)d\tau = y \star x(t)$$

Sous ces conditions,  $x \star y$  est bien défini et  $x \star y \in L^1(\mathbb{R})$

### TF et produit de convolution

Soient  $(x, y) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ . Alors la TF de leur produit de convolution a pour expression :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(x \star y)(\nu) = \mathcal{F}(x)(\nu) \times \mathcal{F}(y)(\nu)$$

De manière duale, si de plus (par exemple)  $\mathcal{F}(y) \in L^1(\mathbb{R})$ , alors :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(x \times y)(\nu) = \mathcal{F}(x) \star \mathcal{F}(y)(\nu)$$

## Exemple 1 : filtrage fréquentiel d'un signal

### Fonction de transfert

Soient  $x \in L^1(\mathbb{R})$  un signal et  $h \in L^1(\mathbb{R})$  la réponse impulsionnelle d'un filtre dont la transformée de Fourier (considérée aussi dans  $L^1(\mathbb{R})$ ) est de la forme :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(h)(\nu) = H(\nu) = e^{-\alpha(\nu - \nu_c)^2}$$

avec  $h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H)(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} t^2} e^{+i2\pi\nu_c t}$

### Filtrage et convolution

On note  $y$  le signal  $x$  filtré selon  $h$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = h \star x(t)$$

Dans le domaine de Fourier, ça revient à multiplier les spectres :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(y)(\nu) = H(\nu) \times \mathcal{F}(x)(\nu)$$

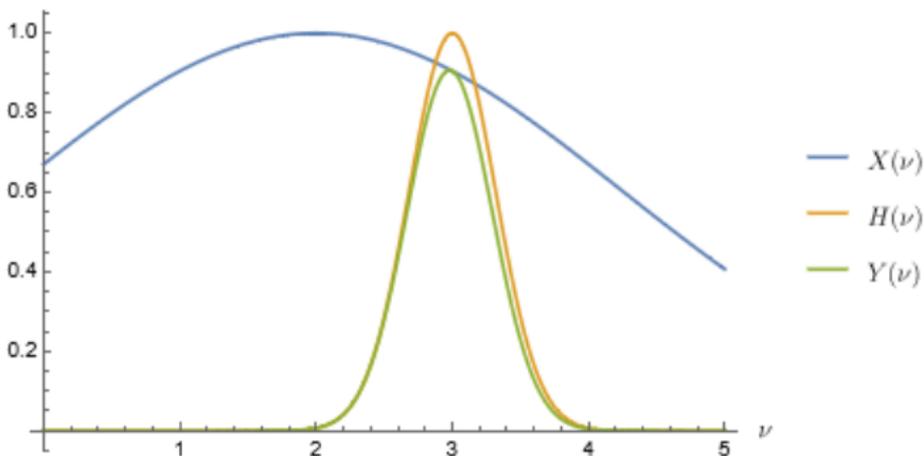
## Exemple 1 : filtrage fréquentiel d'un signal

### Fonction de transfert

Soient  $x \in L^1(\mathbb{R})$  un signal et  $h \in L^1(\mathbb{R})$  la réponse impulsionnelle d'un filtre dont la transformée de Fourier (considérée aussi dans  $L^1(\mathbb{R})$ ) est de la forme :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(h)(\nu) = H(\nu) = e^{-\alpha(\nu-\nu_c)^2}$$

avec  $h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H)(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} t^2} e^{+i2\pi\nu_c t}$



## Exemple 2 : filtrage temporel d'un signal

### Apodisation d'un signal

Soit  $x \in L^1(\mathbb{R})$ . L'apodisation (filtre temporel)  $x_T$  de  $x$  sur  $[0, T]$  est telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_T = \mathbb{1}_{[0, T]}(t) \times x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### TF d'un signal apodisé

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(x_T)(\nu) = \mathcal{F}(\mathbb{1}_{[0, T]}) \star \mathcal{F}(x)(\nu) \text{ où } \mathcal{F}(\mathbb{1}_{[0, T]}) = T \operatorname{sinc}(\pi\nu T) e^{-i\pi\nu T}$$

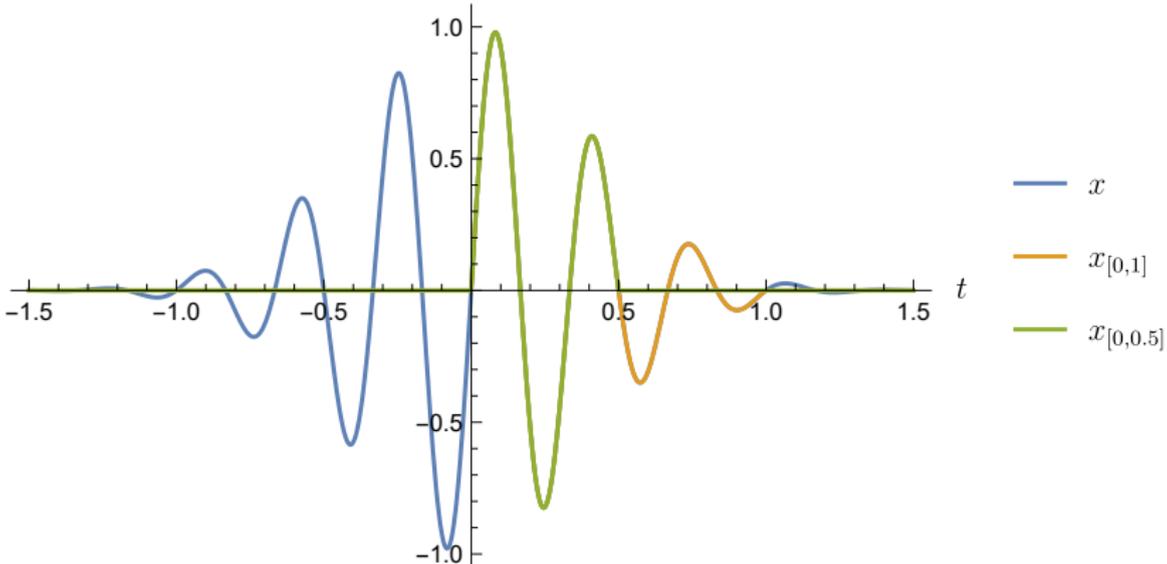
## Exemple 2 : filtrage temporel d'un signal

### Apodisation d'un signal

Soit  $x \in L^1(\mathbb{R})$ . L'apodisation (filtre temporel)  $x_T$  de  $x$  sur  $[0, T]$  est telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_T = \mathbb{1}_{[0, T]}(t) \times x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \sin(6\pi t)$$

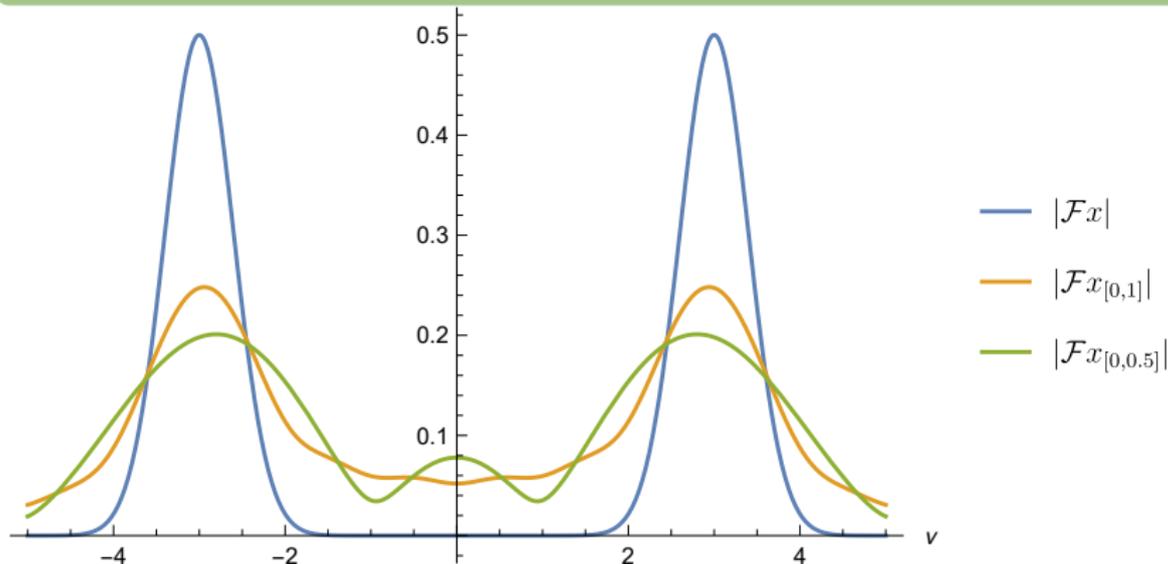


## Exemple 2 : filtrage temporel d'un signal

### Apodisation d'un signal

Soit  $x \in L^1(\mathbb{R})$ . L'apodisation (filtre temporel)  $x_T$  de  $x$  sur  $[0, T]$  est telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_T = \mathbb{1}_{[0, T]}(t) \times x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



## Conséquences énergétiques

### Relation de Parseval-Plancherel

Soient  $(x, y) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$  tels que (par exemple)  $\mathcal{F}(y) \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors :

$$\begin{aligned} E_{xy} &= \langle x, y \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(x)(\nu)\mathcal{F}(y)^*(\nu)d\nu \end{aligned}$$

$E_{xy}$  représente l'énergie d'interaction entre les signaux  $x$  et  $y$

### Théorème de Parseval

Soit  $x \in L^1(\mathbb{R})$  tel que  $\mathcal{F}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $x \in L^2(\mathbb{R})$  et :

$$E_x = \|x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\mathcal{F}(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \Leftrightarrow E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(x)(\nu)|^2 d\nu$$

### Interprétation

Cette relation montre que les énergies  $E_x$  et  $E_{xy}$  sont conservées par TF, autrement dit l'énergie décrite en temps est égale à l'énergie décrite en fréquences !

## Puissance d'un signal

### Définition

La puissance correspond à l'énergie par unité de temps. Soit un signal  $t \mapsto x(t)$ , on définit la puissance instantanée par :

$$P_x(t) = |x(t)|^2$$

### Puissances moyennes

- Puissance moyenne sur une durée  $T$  :

$$\bar{P}_x(t, T) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} P_x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} |x(t)|^2 dt$$

- Puissance moyenne :

$$\bar{P}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

## Typologie de signaux déterministes

### Signaux transitoires

Si  $x \in L^2(\mathbb{R})$ , le signal est dit transitoire, i.e à énergie finie :

$$E_x = \|x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Par conséquent  $\bar{P}_x = 0$ , sa puissance moyenne est nulle.

### Signaux permanents

Un signal est dit permanent s'il est borné et à puissance moyenne finie ( $\bar{P}_x < +\infty$ ), mais à énergie infinie :  $E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \rightarrow +\infty$ . Autrement dit :

$$x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{x \in L^\infty(\mathbb{R}), x \notin L^2(\mathbb{R}) \text{ et } \bar{P}_x < +\infty\}$$

En particulier, un signal périodique est un signal permanent.

## Densité spectrale d'énergie

### DSE

La densité spectrale d'énergie  $S_x$  d'un signal  $x \in L^1(\mathbb{R})$  est définie par :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad S_x(\nu) = |\mathcal{F}(x)(\nu)|^2$$

De même, on définit la DSE d'interaction  $S_{xy}$  entre les signaux  $(x, y) \in L^1(\mathbb{R})$  :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad S_{xy}(\nu) = \mathcal{F}(x)(\nu) \mathcal{F}(y)(\nu)^*$$

### DSE signal transitoire

Si  $x \in L^2(\mathbb{R})$ , alors grâce au théorème de Parseval :

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} S_x(\nu) d\nu$$

### Signal permanent

Si  $x \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  (i.e  $E_x \rightarrow +\infty$ ), le théorème de Parseval ne s'applique plus !

## Densité spectrale de puissance

### Troncature signal permanent

- $x \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  signal permanent  $\Rightarrow x_T(t) = \mathbb{1}_{[-T/2, T/2]}(t)x(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$   
signal à énergie finie.
- Calcul de la TF :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(x_T)(\nu) = \mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-T/2, T/2]}) \star \mathcal{F}(x)(\nu)$$

$$\text{avec } \forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-T/2, T/2]})(\nu) = T \operatorname{sinc}(\pi \nu T)$$

### DSP

- DSP :  $\forall \nu \in \mathbb{R}, S_x(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\mathcal{F}(x_T)(\nu)|^2$
- Idem DSPi :  $\forall \nu \in \mathbb{R}, S_{xy}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{F}(x_T)(\nu) \mathcal{F}(y_T)(\nu)^*$

## Autocorrélation

### Définition

La corrélation (ou auto-corrélation) d'un signal  $x$ , notée  $C_x$ , réalise une comparaison entre un signal et ses copies retardées. C'est un indicateur de la déformation du signal au cours du temps.

### Corrélation d'un signal transitoire

La corrélation de  $x \in L^2(\mathbb{R})$  est homogène à une énergie, et :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, C_{xx}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt \quad ; \quad C_x(0) = E_x$$

### Corrélation d'un signal permanent

La corrélation de  $x \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  est homogène à une puissance, et :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt \quad ; \quad C_x(0) = \bar{P}_x$$

## Intercorrélation

### Définition

L'intercorrélation de deux signaux  $(x, y)$ , notée  $C_{xy}$ , compare le signal  $x$  et le signal  $y$  retardé de  $\tau$ . Cette opération permet d'estimer le retard entre deux signaux.

### Intercorrélation de signaux transitoires

L'intercorrélation de  $(x, y) \in L^2(\mathbb{R})$  est définie par :

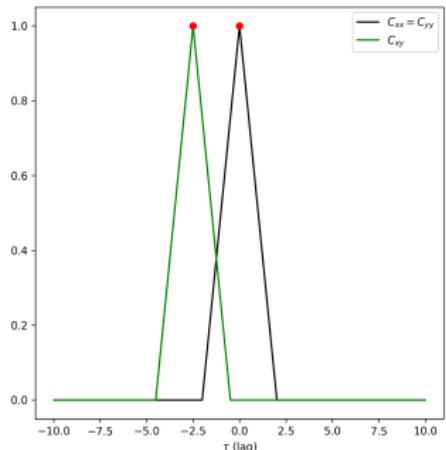
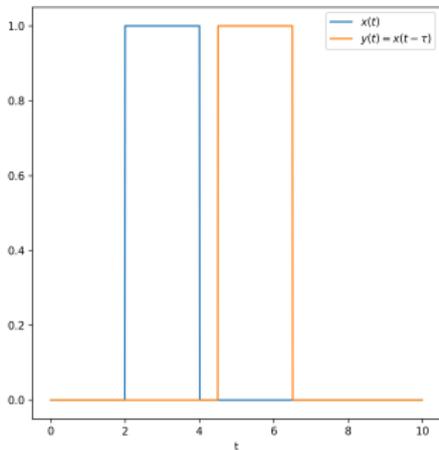
$$\forall \tau \in \mathbb{R}, C_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

### Intercorrélation de signaux permanents

L'intercorrélation de  $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  est :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

# Illustration



## Commandes python

- `from scipy import signal`
- `signal.correlate()`
- `signal.correlation_lags()`

## Relations de Wiener-Khintchine

### Théorème de Wiener-Khintchine

Pour deux signaux  $(x, y) \in L^2(\mathbb{R})$  ou  $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, S_{xy}(\nu) = \mathcal{F}(\tau \mapsto C_{xy}(\tau))(\nu)$$

ou

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, C_{xy}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(\nu \mapsto S_{xy}(\nu))(\tau)$$

### Idée démonstration

- Relation de Parseval-Plancherel
- TF d'une fonction retardée de  $\tau \in \mathbb{R}$  :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(t \mapsto y(t - \tau))(\nu) = \mathcal{F}(y)(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau}$$

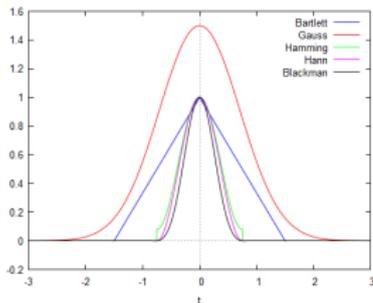
## STFT

## Phénomène de Gibbs

Signal mesuré = durée finie  $\Rightarrow$  Déformation (élargissement et oscillations) du spectre

## Fenêtrage

- fenêtre  $t \mapsto w(t)$  à support compact : Bartlett (triangulaire), Gauss, Hann, Hamming, Blackmann, ...
- Choix de la fenêtre dépend de l'objectif de l'étude : résolution fréquentielle, dynamique de la fenêtre



## Short Time Fourier Transform (STFT)

TF à fenêtre glissante :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \mathcal{G}(x)(\nu, \tau) = \mathcal{F}(t \mapsto x(t)w(t - \tau))(\nu, \tau)$$

$$\mu p p t \in \mathbb{R}, x(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(x)(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}(x)(\nu, \tau) w(t - \tau) e^{+i2\pi\nu t} d\nu d\tau$$

## Sommaire : Analyse de signaux aléatoires stationnaires

Introduction

Analyse de signaux déterministes

**Analyse de signaux aléatoires stationnaires**

Caractéristiques statistiques du premier et deuxième ordre

Processus stochastique stationnaires et ergodiques

Réponse d'une structure à une sollicitation

Acquisition de signaux

FDD en pratique

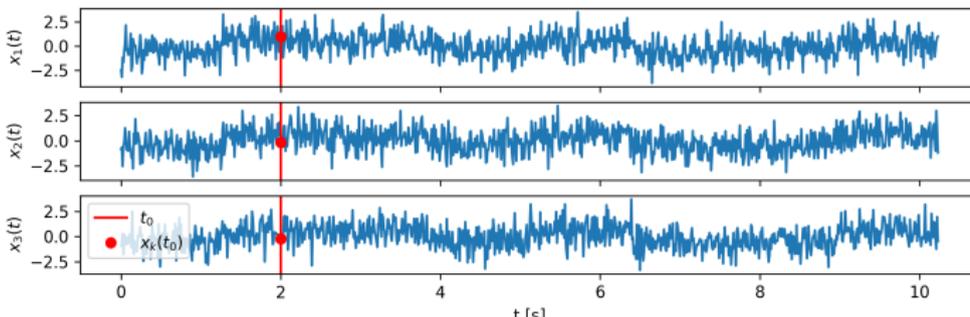
Conclusion

## Moyenne d'ensemble

### Définition

- Signaux aléatoires  $\Rightarrow$  approche probabiliste
- Soient  $K$  réalisations d'une grandeur  $\{t \mapsto x_k(t)\}_{1 \leq k \leq K}$ . On note  $\mu_x(t_0)$  sa moyenne d'ensemble en  $t = t_0$  ( $E[.]$  espérance statistique) :

$$\mu_x(t_0) = E[x(t_0)] = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k(t_0)$$



## Moyenne d'ensemble

### Définition

- Signaux aléatoires  $\Rightarrow$  approche probabiliste
- Soient  $K$  réalisations d'une grandeur  $\{t \mapsto x_k(t)\}_{1 \leq k \leq K}$ . On note  $\mu_x(t_0)$  sa moyenne d'ensemble en  $t = t_0$  ( $E[.]$  espérance statistique) :

$$\mu_x(t_0) = E[x(t_0)] = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k(t_0)$$

### Remarques

- Variables centrées  $E[x(t_0) - \mu_x(t_0)] = 0$
- Moyenne d'ensemble  $\neq$  moyenne temporelle :  $\bar{x}_k = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt$

## Distribution statistique

### Densité de probabilité

- Signal mesuré  $t \mapsto x(t)$  : une observation (réalisation) de la variable aléatoire (stochastique)  $x(t_0)$
- $x(t_0)$  représenté par sa densité de probabilité  $x \mapsto p(x)$  :

$$\text{prob}(x(t_0) \in [x, x + dx]) = p(x)dx ; \text{prob}(x(t_0) \in \mathbb{R}) = 1 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$$

### Moments de $p(x)$

- Espérance statistique = premier moment de  $p(x)$  :

$$E[x(t_0)] = \int_{\mathbb{R}} xp(x) dx = \mu_x(t_0)$$

- Variance = second moment de  $p(x)$  :

$$E[(x(t_0) - \mu_x(t_0))^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_x(t_0))^2 p(x) dx = \sigma_x^2(t_0)$$

## Distribution statistique

### Densité de probabilité

- Signal mesuré  $t \mapsto x(t)$  : une observation (réalisation) de la variable aléatoire (stochastique)  $x(t_0)$
- $x(t_0)$  représenté par sa densité de probabilité  $x \mapsto p(x)$  :

$$\text{prob}(x(t_0) \in [x, x + dx]) = p(x)dx ; \text{prob}(x(t_0) \in \mathbb{R}) = 1 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$$

### Loi normale

- Signaux aléatoires sous bruit ambiant = nombreux facteurs aléatoires indépendants
- Suivent une loi normale (loi statistique de Gauss) :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t_0)} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_x(t_0)}{\sigma_x(t_0)} \right)^2}$$

## Fonctions de corrélation

### Définitions

- Soient  $(x_k, y_k)$  deux réalisations (réelles).
- Intercorrélation :

$$C_{xy}(t_0, t_0 - \tau) = E[x_k(t_0)y_k(t_0 - \tau)] = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k(t_0)y_k(t_0 - \tau)$$

- Autocorrélation :

$$C_{xx}(t_0, t_0 - \tau) = E[x_k(t_0)x_k(t_0 - \tau)] = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k(t_0)x_k(t_0 - \tau)$$

## Processus stationnaire

Un phénomène aléatoire est dit **stationnaire** si les grandeurs  $\mu_x$  et  $C_{xy}$  (caractéristiques statistiques du premier et second ordre) ne varient pas :

$$\mu_x = \mu_x(t_0) \quad ; \quad C_{xy}(\tau) = C_{xy}(t_0, t_0 - \tau) = C$$

## Processus décorrélés

Les processus aléatoires  $(x, y)$  sont décorrélés si  $C_{xy}(\tau) = 0 \forall \tau \in \mathbb{R}$ .

## Processus ergodique

### Définition

Un processus stationnaire est dit **ergodique** si ses propriétés statistiques peuvent être déterminées à partir de l'analyse temporelle d'une unique réalisation.

### Conséquences

- Moyenne d'ensemble = moyenne temporelle

$$\forall k \in \llbracket 1; K \rrbracket, \quad \mu_x = \overline{x_k} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt$$

- Corrélation d'ensemble = corrélation temporelle

$$\forall k \in \llbracket 1; K \rrbracket, \quad C_{x_k y_k}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) y_k(t - \tau) dt = C_{y_k x_k}(-\tau)$$

- Théorème de Wiener-Khintchine :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad S_{xy}(\nu) = \mathcal{F}(C_{xy})(\nu) \quad ; \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad C_{xy}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_{xy})(\tau)$$

## Processus ergodique

### Définition

Un processus stationnaire est dit **ergodique** si ses propriétés statistiques peuvent être déterminées à partir de l'analyse temporelle d'une unique réalisation.

### Conséquences

- On retrouve le théorème de Parseval :

$$C_{xx}(0) = \sigma_x^2 = E[x(t)^2] = \int_{\mathbb{R}} S_{xx}(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(x)(\nu)|^2 d\nu$$

- Si bande passante finie  $B = \nu_1 - \nu_0$  :

$$\forall \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1], S_{xx}(\nu) \neq 0 \Rightarrow \sigma_x^2 = 2 \int_{\nu_0}^{\nu_1} S_{xx}(\nu) d\nu$$

### Exemple fondamental : bruit blanc

Signal d'énergie constante  $S_0 = \frac{\sigma_x^2}{2B}$  sur une bande  $B = \nu_1 - \nu_0$ .

## Processus ergodique

### Définition

Un processus stationnaire est dit **ergodique** si ses propriétés statistiques peuvent être déterminées à partir de l'analyse temporelle d'une unique réalisation.

### Conséquences

- On retrouve le théorème de Parseval :

$$C_{xx}(0) = \sigma_x^2 = E[x(t)^2] = \int_{\mathbb{R}} S_{xx}(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(x)(\nu)|^2 d\nu$$

- Si bande passante finie  $B = \nu_1 - \nu_0$  :

$$\forall \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1], S_{xx}(\nu) \neq 0 \Rightarrow \sigma_x^2 = 2 \int_{\nu_0}^{\nu_1} S_{xx}(\nu) d\nu$$

### Hypothèse

Dans la suite, tous les signaux seront considérés stationnaires et ergodiques.

## Sommaire : Réponse d'une structure à une sollicitation

Introduction

Analyse de signaux déterministes

Analyse de signaux aléatoires stationnaires

Réponse d'une structure à une sollicitation

Acquisition de signaux

FDD en pratique

Conclusion

# SLIT

## Définition

- SLIT = Système Linéaire Invariant dans le Temps
- Soient deux signaux d'entrées  $(x_1, x_2)$  de sorties  $(y_1, y_2)$ , alors  $\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \tau \in \mathbb{R}$ ,

$$a_1 x_1(t - \tau) + a_2 x_2(t - \tau) \xrightarrow{h(t)} a_1 y_1(t - \tau) + a_2 y_2(t - \tau)$$

## Réponse impulsionnelle

- $t \mapsto h(t)$  est la réponse impulsionnelle (entrée  $= \delta$ ) du SLIT :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = h \star x(t)$$

- Sa TF  $\nu \mapsto \mathcal{F}(h)(\nu)$  est la fonction de transfert du SLIT :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(y)(\nu) = \mathcal{F}(h)(\nu) \times \mathcal{F}(x)(\nu)$$

## Fonctions propres

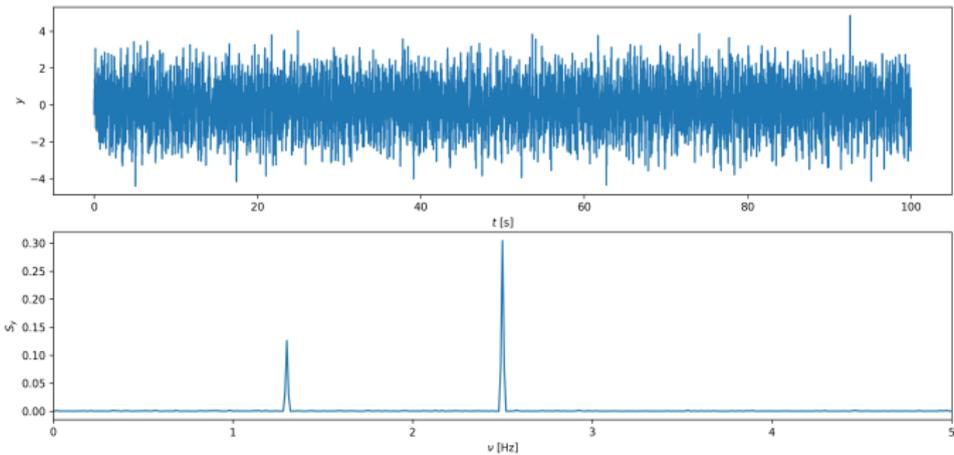
- $x(t) = e^{i2\pi\nu_0 t} \Rightarrow y(t) \propto x(t)$ . Donc  $t \mapsto e^{i2\pi\nu_0 t}$  fonction propre du SLIT
- Justification de l'utilisation de la théorie de Fourier.

## SISO

## Définition

- Single Input  $t \mapsto x(t)$  Single Output  $t \mapsto y(t)$
- Densité spectrale :  $\forall \nu \in \mathbb{R}, S_y(\nu) = S_x(\nu) |\mathcal{F}(h)(\nu)|^2$
- Si signal d'entrée = bruit blanc de densité spectrale  $S_0 \in \mathbb{R}^+$ , alors

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, S_y(\nu) = |\mathcal{F}(y)(\nu)|^2 = S_0 |\mathcal{F}(h)(\nu)|^2 \propto |\mathcal{F}(h)(\nu)|^2$$

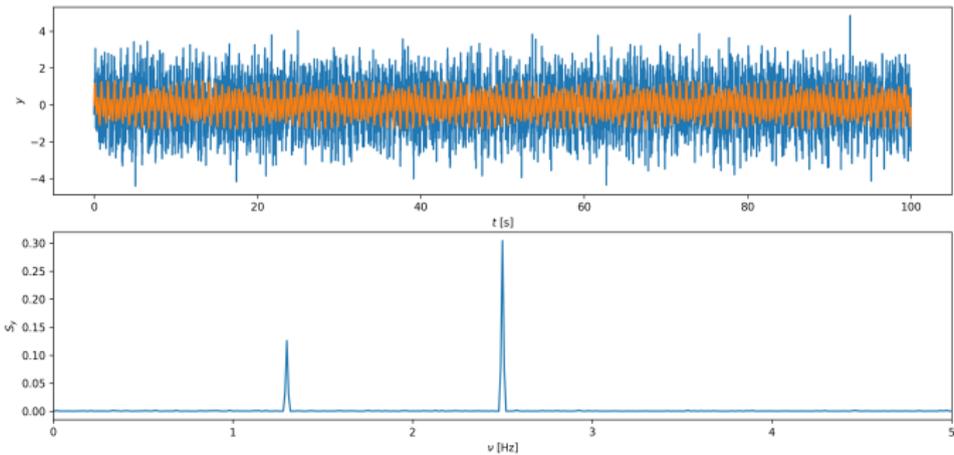


## SISO

## Définition

- Single Input  $t \mapsto x(t)$  Single Output  $t \mapsto y(t)$
- Densité spectrale :  $\forall \nu \in \mathbb{R}, S_y(\nu) = S_x(\nu) |\mathcal{F}(h)(\nu)|^2$
- Si signal d'entrée = bruit blanc de densité spectrale  $S_0 \in \mathbb{R}^+$ , alors

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, S_y(\nu) = |\mathcal{F}(y)(\nu)|^2 = S_0 |\mathcal{F}(h)(\nu)|^2 \propto |\mathcal{F}(h)(\nu)|^2$$



# MIMO

## Définition

- Soit un dispositif expérimental constitué de  $N_c$  capteurs avec 3 voies d'acquisition  $X, Y, Z \Rightarrow M = 3N_c$  mesures.
- MIMO = Multiple Input Multiple Output  $\underline{y} \in \mathbb{R}^M$  tel que chaque composante représente une acquisition  $\{t \mapsto y_m(t)\}_{1 \leq m \leq M}$

## Matrice de corrélation

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \underline{\underline{C}}_y(\tau) = E [\underline{y}(t) \cdot \underline{y}(t - \tau)^T]$$

$$= \begin{bmatrix} C_{y_1 y_1}(\tau) & C_{y_1 y_2}(\tau) & \dots & C_{y_1 y_M}(\tau) \\ C_{y_2 y_1}(\tau) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ C_{y_M y_1}(\tau) & \dots & \dots & C_{y_M y_M}(\tau) \end{bmatrix}$$

$$= {}^T \underline{\underline{C}}_y(-\tau)$$

# MIMO

## Définition

- Soit un dispositif expérimental constitué de  $N_c$  capteurs avec 3 voies d'acquisition  $X, Y, Z \Rightarrow M = 3N_c$  mesures.
- MIMO = Multiple Input Multiple Output  $\underline{y} \in \mathbb{R}^M$  tel que chaque composante représente une acquisition  $\{t \mapsto y_m(t)\}_{1 \leq m \leq M}$

## Matrice de densité spectrale (DSP)

Grâce au théorème de Wiener-Khinchine :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \underline{\underline{S}}_y(\nu) = \begin{bmatrix} S_{y_1y_1}(\nu) & S_{y_1y_2}(\nu) & \dots & S_{y_1y_M}(\nu) \\ S_{y_2y_1}(\nu) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_{y_My_1}(\nu) & \dots & \dots & S_{y_My_M}(\nu) \end{bmatrix}$$

$$=^H \underline{\underline{S}}_y(\nu) =^T \underline{\underline{S}}_y^*(\nu) =^T \underline{\underline{S}}_y(-\nu) \text{ (signaux réels)}$$

## FDD

## Décomposition modale

- $M$  points de mesure = système à  $M$  ddl
- Soient  $\underline{\Phi}$  la matrice modale et  $t \mapsto \underline{p}(t)$  le vecteur des coordonnées modales.

$$\forall m \in \llbracket 1; M \rrbracket, y_m(t) = \sum_{K=1}^M \Phi_m^K p_K(t) = \underline{\Phi}_m \cdot \underline{p}(t) \Rightarrow \underline{y}(t) = \underline{\Phi} \cdot \underline{p}(t)$$

## DSP

- Matrice de corrélation :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \underline{\underline{C}}_y(\tau) = \underline{\Phi} \cdot \underline{\underline{C}}_p(\tau) \cdot \underline{\Phi}^T$$

- Matrice de densité spectrale (Wiener-Khintchine) :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \underline{\underline{S}}_y(\nu) = \underline{\Phi} \cdot \underline{\underline{S}}_p(\nu) \cdot \underline{\Phi}^H$$

## FDD

## Singular Value Decomposition (SVD)

- Rappel : une matrice carrée  $\underline{\underline{U}} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  est unitaire ssi  $\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{U}}^H = \underline{\underline{I}}$
- SVD : méthode de factorisation d'une matrice quelconque  $\underline{\underline{M}} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$  telle que

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{V}}^H$$

- $\underline{\underline{U}} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  unitaire : vecteurs singulier à gauche (de base orthonormée de  $\mathbb{C}^m$ )
- $\underline{\underline{V}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  unitaire : vecteurs singulire à droite (de base orthonormée de  $\mathbb{C}^n$ )
- $\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}^+)$  diagonale : valeurs singulières de  $\underline{\underline{M}}$ , triées par valeurs décroissantes  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m \geq 0$

## Lien SVD avec EVD

- $\underline{\underline{M}}^H \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^H \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{U}}$  ;  $\underline{\underline{M}} \underline{\underline{M}}^H = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^H \cdot \underline{\underline{V}}^H$
- valeurs singulières = racines des valeurs propres de  $\underline{\underline{M}}^H \underline{\underline{M}}$  et de  $\underline{\underline{M}} \underline{\underline{M}}^H$

## FDD

## Identification

- $\underline{\underline{S}}$  matrice carrée hermitienne définie positive donc  $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}$
- Si les coordonnées modales sont décorrélées, alors la matrice  $\underline{\underline{S}}_p$  est diagonale et on a :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \underline{\underline{S}}_y(\nu) = \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\underline{S}}_p(\nu) \cdot \underline{\underline{\Phi}}^H = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(\nu) \cdot \underline{\underline{U}}^H$$

## Interprétation : valeurs singulières

- $\{\Sigma_{ii}(\nu) = s_i(\nu)\}_{1 \leq i \leq M}$  : valeurs singulières de  $\underline{\underline{S}}_y$  triées par valeurs décroissantes
- liées aux réponses modales  $\{S_{p_{ii}}(\nu)\}_{1 \leq i \leq M}$
- permettent de définir le spectre de systèmes SDOF équivalents caractérisés par les mêmes paramètres modaux que les modes contribuant à la réponse du système MDOF étudié.

# FDD

## Identification

- $\underline{\underline{S}}$  matrice carrée hermitienne définie positive donc  $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}$
- Si les coordonnées modales sont décorréées, alors la matrice  $\underline{\underline{S}}_p$  est diagonale et on a :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \underline{\underline{S}}_y(\nu) = \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\underline{S}}_p(\nu) \cdot \underline{\underline{\Phi}}^H = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(\nu) \cdot \underline{\underline{U}}^H$$

## Interprétation : valeurs singulières

- Près d'une fréquence de résonance  $\nu_0$  du MDOF, la première VS ( $s_1$ ) contient l'information sur le mode dominant à cette fréquence  $\nu_0$ .
- $\text{rang}(\underline{\underline{S}}_y(\nu_0)) = \text{nombre de VS non nulles de } \underline{\underline{\Sigma}}(\nu_0)$
- $\forall \nu \in \mathbb{R}, N_m$  VS dominantes  $\Leftrightarrow N_m$  modes contribuant significativement à la réponse de la structure.

## FDD

## Identification

- $\underline{\underline{S}}$  matrice carrée hermitienne définie positive donc  $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}$
- Si les coordonnées modales sont décorréées, alors la matrice  $\underline{\underline{S}}_p$  est diagonale et on a :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \underline{\underline{S}}_y(\nu) = \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\underline{S}}_p(\nu) \cdot \underline{\underline{\Phi}}^H = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(\nu) \cdot \underline{\underline{U}}^H$$

## Interprétation : valeurs singulières/vecteurs singuliers

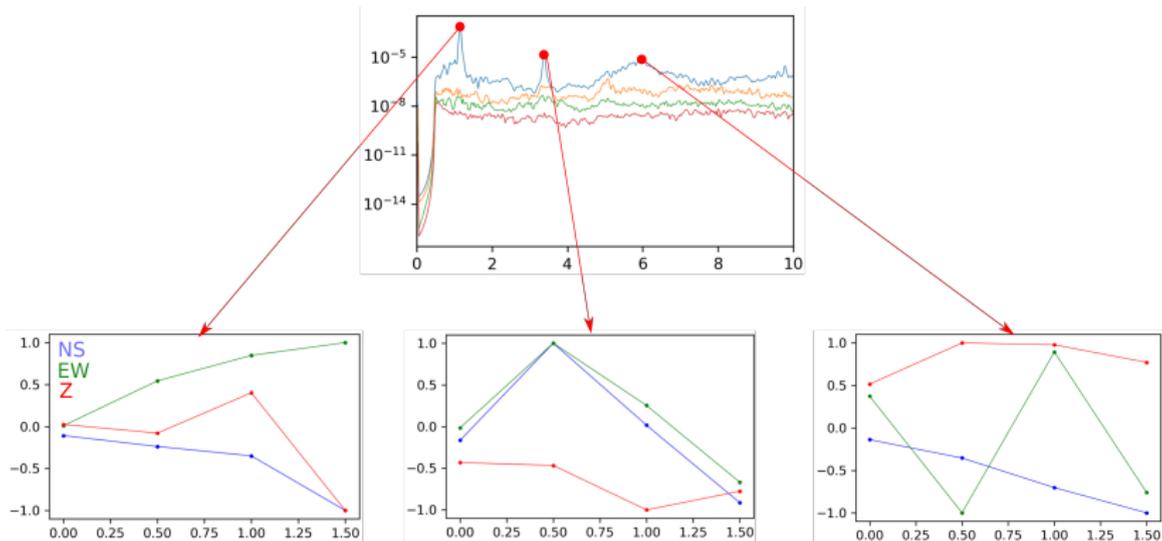
Si (i) un seul mode est dominant à  $\nu_K$  et (ii)  $\nu \mapsto s_1(\nu_K)$  présente un pic (lié au  $K^{\text{ième}}$  mode), alors :

$$\text{rang}\left(\underline{\underline{S}}_y(\nu_K)\right) = 1$$

$$\underline{\underline{S}}_y(\nu_K) = s_1(\nu_K) \underline{\underline{U}}_1(\nu_K) \cdot \underline{\underline{U}}_1(\nu_K)^H$$

$$\text{déformée modale : } \underline{\underline{\Phi}}_k = \underline{\underline{U}}_1(\nu_K)$$

## Exemple FDD



## Sommaire : Acquisition de signaux

Introduction

Analyse de signaux déterministes

Analyse de signaux aléatoires stationnaires

Réponse d'une structure à une sollicitation

**Acquisition de signaux**

Instrumentation

Echantillonnage

Représentation fréquentielle signal numérique

FDD en pratique

Conclusion

## Chaîne d'acquisition

### Capteur : vélocimètre, accéléromètre, . . .

**Objectif** Transformer en tension électrique les mouvements de son support.

**Sortie** Signal analogique (continu en amplitude) qui est transmis au numériseur.

**Propriétés** capteur en particulier défini par sa :

- Bande d'amplitude (leur dynamique) et de fréquences pouvant être mesurées
- Sensibilité : évolution de la grandeur de sortie sur la grandeur d'entrée

### Numériseur

**Objectif** Echantillonner le signal analogique reçu avec une cadence fixe (fréquence d'échantillonnage)

**Sortie** Signal numérique discret en temps et en amplitude.

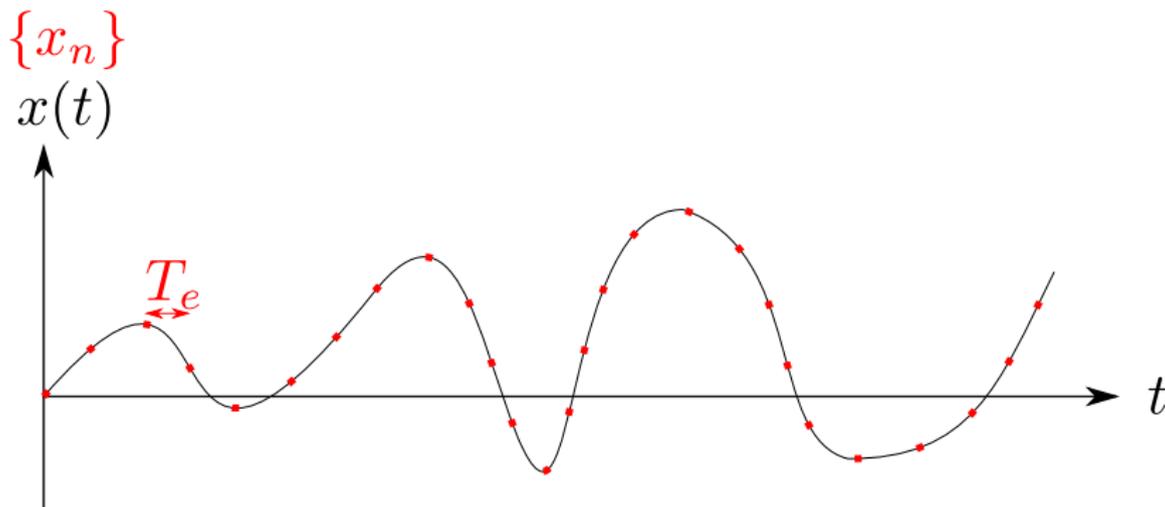
**Propriétés** numériseur en particulier défini par sa :

- Résolution : nombre de digit chiffres pouvant être enregistrés en un pas de temps
- Fréquence du processeur : fréquence maximale à laquelle les signaux pourront être échantillonnés

## Théorème de Nyquist-Shannon

### Echantillonnage

L'échantillonnage d'un signal analogique  $t \mapsto x(t)$  défini sur  $\mathbb{R}$  selon une fréquence d'échantillonnage  $\nu_e = 1/T_e$  consiste à prélever les valeurs de  $x$  aux temps  $t_n = nT_e$ , tel que :  $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x(nT_e)$



# Reconstruction

## Spectre

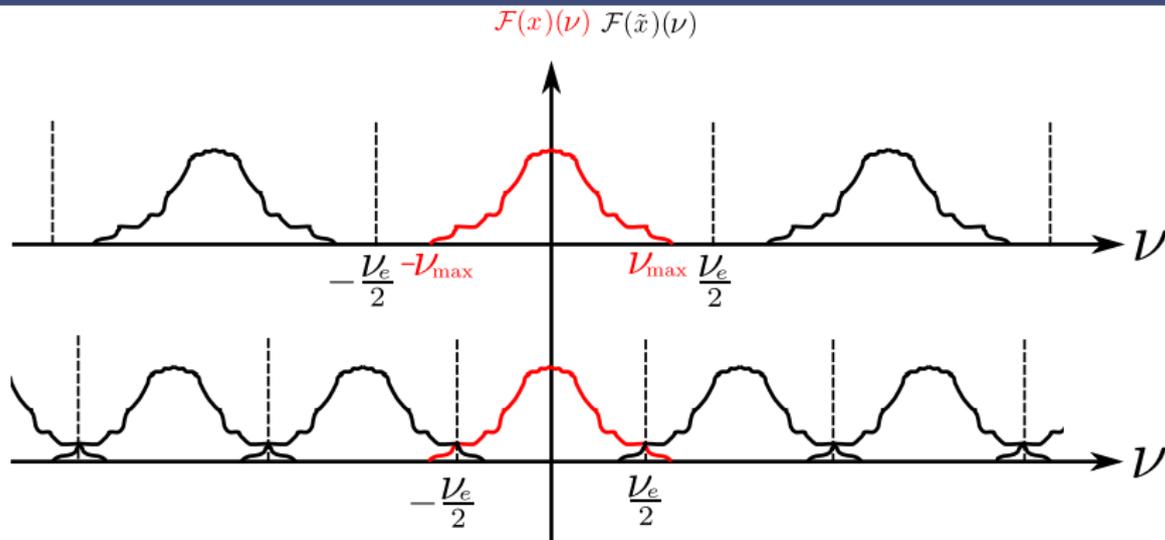
Soit  $t \mapsto \tilde{x}(t)$  le signal analogique tel que ( $\text{III}$  peigne de Dirac) :

$$\tilde{x}(t) = \text{III}_{T_e}(t) \times x(t) \quad ; \quad \text{III}_{T_e}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)$$

Formule de Poisson :  $\mathcal{F}(\text{III}_{T_e}) = \nu_e \text{III}_{\nu_e}$ . Ainsi

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\tilde{x})(\nu) = \nu_e \text{III}_{1/T_e} \star \mathcal{F}(x)(\nu) = \nu_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(x)(\nu - n\nu_e)$$

Le signal  $\tilde{x}$  a donc un spectre périodisé de période  $\nu_e = 1/T_e$ .



## Théorème de Nyquist-Shannon

Soit un signal analogique  $t \mapsto x(t)$ . Si

(i) le support du spectre de  $x$  est borné (bande passante limitée) :

$$\forall |\nu| > \nu_{\max}, \mathcal{F}(x)(\nu) = 0$$

(ii) la condition  $\nu_{\max} < \frac{\nu_e}{2}$  (fréquence de Nyquist) est vérifiée

Alors la reconstruction du signal  $t \mapsto x(t)$  est réalisable à partir du signal  $\{x_n\}$

## Conséquences

- Si les hypothèses du théorème de Shannon ne sont pas remplies, apparaît le phénomène de **repliement spectral** (aliasing en anglais)
- Un signal de durée finie (cas de tous les signaux mesurés) ne peut pas satisfaire le théorème d'échantillonnage, car sa bande passante est nécessairement infinie !!
- (Slepian et Pollak, 1961) : tous les signaux mesurés sont à durée et à bande passante « approximativement limitées », dont la fraction d'énergie résiduelle négligée (en temps et en fréquence) peut être définie par rapport à l'énergie du bruit ambiant
- En pratique : filtre passe-bas "anti-repliement" ajouté au numériseur avant de l'échantillonner.

## Représentation temporelle

Soit  $\{x_n\}_{1 \leq n \leq N}$  un signal de longueur  $N$  échantillonné à la fréquence  $\nu_e$ .

**Résolution temporelle :**  $\Delta t = T_e = \frac{1}{\nu_e}$

**Durée du signal :**  $T = N\Delta t = NT_e$

## Représentation spectrale

**Shannon :**  $\nu_{\max} = \frac{\nu_e}{2}$

**Taille spectre :** longueur  $N$

**Résolution spectrale :**  $\Delta\nu = \frac{1}{T} = \frac{\nu_e}{N}$

## Principe d'incertitude

$\Delta t \Delta \nu = \frac{1}{N}$  donc impossible d'avoir à la fois une bonne résolution en temps et en fréquence.

## Transformée de Fourier Discrète (TFD)

- FFT = version optimisée (Cooley et Tukey, 1965) pour un signal en  $N = 2^n$  (voir aussi FFTW <https://www.fftw.org/>)
- **Transformée directe** : Soit  $\{x_n\}_{1 \leq n \leq N}$  signal échantillonné ( $T_e$ ) :

$$\forall m \in \llbracket 1; N \rrbracket, \mathcal{F}_m(x) = \alpha \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi \frac{m\nu_e}{N} \frac{n}{\nu_e}} = \alpha \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi \frac{mn}{N}}$$

- $\frac{m\nu_e}{N} = m\Delta\nu$  et  $\frac{n}{\nu_e} = n\Delta t$  variables discrètes fréquence et temps.
- **Transformée inverse** :

$$\forall n \in \llbracket 1; N \rrbracket, \mathcal{F}_n^{-1}(x) = \beta \sum_{m=1}^N x_m e^{+i2\pi \frac{m\nu_e}{N} \frac{n}{\nu_e}} = \beta \sum_{m=1}^N x_m e^{+i2\pi \frac{mn}{N}}$$

## Paramétrage

Les coefficients  $(\alpha, \beta)$  doivent vérifier :  $\alpha\beta N = 1$ . Par exemple :

- $\alpha = \Delta t$ ,  $\beta = \Delta f$  pour conserver l'homogénéité des grandeurs transformées continues
- $\alpha = \beta = 1/\sqrt{N}$  pour symétriser les TF directes et inverses.

## Transformée de Fourier Discrète (TFD)

- FFT = version optimisée (Cooley et Tukey, 1965) pour un signal en  $N = 2^n$  (voir aussi FFTW <https://www.fftw.org/>)
- Transformée directe** : Soit  $\{x_n\}_{1 \leq n \leq N}$  signal échantillonné ( $T_e$ ) :

$$\forall m \in \llbracket 1; N \rrbracket, \mathcal{F}_m(x) = \alpha \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi \frac{m\nu_e}{N} \frac{n}{\nu_e}} = \alpha \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi \frac{mn}{N}}$$

- $\frac{m\nu_e}{N} = m\Delta\nu$  et  $\frac{n}{\nu_e} = n\Delta t$  variables discrètes fréquence et temps.
- Transformée inverse** :

$$\forall n \in \llbracket 1; N \rrbracket, \mathcal{F}_n^{-1}(x) = \beta \sum_{m=1}^N x_m e^{+i2\pi \frac{m\nu_e}{N} \frac{n}{\nu_e}} = \beta \sum_{m=1}^N x_m e^{+i2\pi \frac{mn}{N}}$$

## Théorème de Parseval-Plancherel discret

$$E_{xy} = \alpha \sum_{n=1}^N x_n y_n^* = \beta \sum_{m=1}^N \mathcal{F}_m(x) \mathcal{F}_m(y)^*$$

## Convolution/corrélation discrète

- Translation dans le temps de signaux finis  $\Rightarrow$  rotation sur un cercle (périodisation) :

$$\forall n \in \llbracket 1; N \rrbracket, \forall m \in \mathbb{Z}, \check{x}_n = x_{n+mN}$$

- Convolution circulaire :

$$\forall k \in \llbracket 1; N \rrbracket, (x \star y)_k = \sum_{n=1}^N x_n y_{k-n}$$

- Corrélation circulaire :

$$\forall k \in \llbracket 1; N \rrbracket, (C_{xy})_k = \sum_{n=1}^N x_n y_{n-k}$$

## Estimation DSP

### Periodogramme moyenné (Welch)

- Signal  $\{x_n\}_{1 \leq n \leq N}$  découpé en  $S$  segments de  $n_S$ , avec ou sans recouvrement (généralement  $n_S/2$ )
- Sur chaque segment,
  - (i) pondération du signal selon une fenêtre temporelle de taille  $n_S$
  - (ii) calcul de la FFT puis du module au carré (DSP du segment)
- DSP moyennée = moyenne des DSP sur les  $S$  segments

### Commande python

<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.welch.html>

```
scipy.signal.welch(x, fs=512, window='hann', nperseg= $n_S$ , noverlap= $n_S/2$ , return_onesided=False, scaling='spectrum')
```

## Sommaire : FDD en pratique

Introduction

Analyse de signaux déterministes

Analyse de signaux aléatoires stationnaires

Réponse d'une structure à une sollicitation

Acquisition de signaux

**FDD en pratique**

Conclusion

## Acquisition

- Quelle gamme de fréquence inspecter?  $\Rightarrow \Delta t$ 
  - (i) Bâtiment grande hauteur, grand pont, ...  $\approx 10^{-1}$  Hz
  - (ii) Bâtiment moyenne hauteur (qqs étages)  $\approx 10^0$  Hz
  - (iii) Élément de structure grande hauteur  $\approx 10^1 - 10^2$  Hz
- Combien de capteurs et où les positionner? Dépend de l'info recherchée (mode transverse, mode de torsion, ...)
- Temps d'acquisition (avec nettoyage, moyennes, etc.)  $\Rightarrow \Delta \nu$

## Nettoyer les données

- $N_c$  capteurs avec 3 voies ( $X, Y, Z$ ) d'acquisition (vitesse et/ou accélération)
- Synchronisation temporelle entre les capteurs (GPS, radio, ...)
- Inspection des traces temps : signaux **stationnaires** de taille commune  $N$
- Pour chaque voie, supprimer un éventuel offset (moyenne temporelle nulle) et/ou dérive (detrend)
- Choix des  $M$  données à comparer : voie par voie ( $M = N_c$ ), ou toutes les voies ensemble ( $M = 3 \times N_c$ ).

## Procédure FDD

### Méthode FDD

Brincker, R., Zhang, L.-M. and Anderson, P., *Modal Identification from Ambient Response using Frequency Domain Decomposition*, Proc. of the 18th IMAC, San Antonio, TX, USA, 2000

### Procédure

- Création du tenseur (dimension 3!) de densité spectrale discret via la méthode de Welch  $\underline{\underline{S}} = (S_{ijk})_{1 \leq i, j \leq M, 1 \leq k \leq N}$  tel que

$$\forall k \in \llbracket 1; N \rrbracket, \underline{\underline{S}}_{\equiv k} = \begin{bmatrix} S_{11k} & S_{12k} & \dots & S_{1Mk} \\ S_{21k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_{M1k} & \dots & \dots & S_{MMk} \end{bmatrix}$$

- A chaque fréquence  $k\Delta\nu$ , décomposition SVD de la matrice  $M \times M$
- Tracé des valeurs singulières en fonction de la fréquence
- Détection des pics de la première valeur singulière  $\Rightarrow$  déformée modale correspondante

## Sommaire : Conclusion

Introduction

Analyse de signaux déterministes

Analyse de signaux aléatoires stationnaires

Réponse d'une structure à une sollicitation

Acquisition de signaux

FDD en pratique

**Conclusion**

# Conclusion

## Synthèse du cours

- Différents types de signaux analogiques : déterministes (permanents ou transitoires), aléatoires stationnaires
- Pour chacun, représentations temporelles/fréquentielles  $\Rightarrow$  densité spectrale
- Echantillonnage
- FDD : une méthode d'extraction des caractéristiques modales

## Autres méthodes

**Méthodes d'identification en fréquence :** EFDD, ARMA fréquentiel, ...

**Méthodes d'identification en temps :** Time Domain Decomposition (TDD), ARMA, Ibrahim Time Domain (ITD), Eigensystem Realization Algorithm (ERA), Stochastic Subspace Identification (SSI), ...

## Quelques livres

### Traitement de signal général

- J. Max et J.-L. Lacoume, *Méthodes et techniques de traitement du signal*. Dunod, 2004.
- M. Bergounioux, *Mathématiques pour le traitement du signal : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2014.

### OMA

- R. Brincker and C. Ventura, *Introduction to operational modal analysis*. Wiley, 2015.
- S.-K. Au, *Operational Modal Analysis*. Springer Singapore, 2017.
- C. Rainieri and G. Fabbrocino, *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures*. Springer New-York, 2014.

### Ondelettes

- S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*. Les éditions de l'école polytechnique, 2000.